

ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКА. ЕЛЕКТРОТЕХНІКА ТА ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА. ЕЛЕКТРОНІКА

DOI: 10.31319/2519-2884.48.2026.9

УДК 62-83:681.513.5

Клюєв О.В., к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0003-4542-3317, e-mail: kluev2006@ukr.net

Яшук О.О., здобувач третього (доктор філософії) рівня, ORCID: 0009-0007-3841-8997,
e-mail: olehyashchuk@gmail.com

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Kliuiev Oleh, Candidate of technical sciences, Associate professor Electrotechnical and electromechanical department

Yashchuk Oleh, Postgraduate Student

Dniprovsk State Technical University, Kamianske

ЗАСТОСУВАННЯ В АВТОМАТИЗОВАНОМУ ПРОЄКТУВАННІ ПРЯМИХ МЕТОДІВ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

У статті викладено сутність прямих методів оптимального керування, які дають змогу уникнути розв'язання погано обумовлених крайових задач, що впливають із принципу максимуму, та в яких розмірність задачі зростає за рахунок додавання до рівнянь динаміки об'єкта керування (ОК) спряжених рівнянь. На простому прикладі пошуку оптимального за точністю програмного керування двигуном постійного струму показано можливість зведення подібних задач до пошуку методами нелінійного математичного програмування мінімуму нелінійної функції багатьох змінних за наявності обмежень, заданих неявно у вигляді рівнянь динаміки об'єкта керування.

Ключові слова: оптимальне керування; дискретизація за часом; прямі методи; цільовий функціонал; нелінійне програмування; автоматизація обчислень.

The paper outlines the essence of direct methods of optimal control, which allow for avoiding the solution of ill-conditioned boundary value problems derived from the maximum principle. In such problems the dimensionality increases due to the addition of costate equations to the plant's dynamics. Using a simple example of finding an accuracy-optimal open-loop control for a DC motor, the paper demonstrates the possibility of reducing such problems to a non-linear mathematical programming task. This involves finding the minimum of a non-linear objective function of several variables subject to constraints implicitly defined as the plant's dynamic equations.

Keywords: optimal control; time discretization; direct methods; objective functional; non-linear programming; computational automation.

Постановка проблеми

Методи розв'язання варіаційних задач поділяються на дві великі групи: аналітичні та чисельні. Чисельні методи розв'язання варіаційних задач поділяються, у свою чергу, також на дві групи: методи, які використовують необхідні умови екстремуму та прямі методи. Необхідні умови оптимальності, що формулюються за принципом максимуму, ґрунтуються на додаткових математичних конструкціях, які призводять до задач, що вимагають, як правило, застосування електронних обчислювальних машин (ЕОМ) для їх розв'язання. Неминучість чисельних розв'язань із застосуванням ЕОМ спричиняє те, що в технічних застосуваннях прямі методи розв'язання виявляються більш зручними. До прямих методів варіаційного числення відносяться всі методи, які безпосередньо не використовують необхідні умови оптимальності. Прямі методи засновані на різних формах апроксимації вектора керуючих впливів $U(t)$ деякою зада-

ною системою функцій. При заміні безперервної задачі оптимального керування скінченно-різницевою, вона стає задачею нелінійного програмування. У теперішній час простежується переважно використання методів нелінійного програмування для розв'язання задач оптимального керування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [1] розглядається задача мінімізації функціонала, пов'язаного з нелінійною крайовою задачею оптимального керування загального вигляду, заданою на фіксованому часовому інтервалі. Формулюються умови, що гарантують розв'язність нелінійної крайової задачі керування, та досліджується структура множини розв'язків. У роботі [2] показано, як шляхом дискретизації змінних керування та стану задача оптимального керування з обмеженнями перетворюється на кінцевимірну задачу нелінійного програмування, яка надалі розв'язується методом прямої колокації. У роботі [3] запропоновано розв'язувати задачі глобального оптимального керування за допомогою алгоритму, що ґрунтується на прямому методі множинної стрільби. Наводяться умови, які свідчать про суттєве зменшення загального часу обчислень порівняно зі стандартним підходом одиночної стрільби. У роботі [4] запропоновано систему керування, в якій у реальному часі контролером розв'язується матричне диференціальне рівняння Рікати на основі відповідних сигналів зворотного зв'язку, формуючи оптимальне завдання за швидкістю для електропривода змінного струму. У статті [5] описується застосування методу прямої транскрипції до випадку гібридного електричного транспортного засобу, коли електропривод живиться від двох джерел енергії, та необхідно визначати розподіл потужності між джерелами таким чином, щоб мінімізувати енергоспоживання всієї системи. Задача повністю дискретизується за часом, а отримана кінцевимірна задача оптимізації розв'язується за допомогою програмних засобів нелінійного програмування. У статті [6] досліджувалася можливість застосування псевдоспектрального методу для оптимізації керування енергетичними потоками гібридного транспортного засобу. Даний метод було застосовано для перетворення задачі оптимального керування на кінцевимірну задачу нелінійного програмування з обмеженнями. Порівняння розв'язків, отриманих із використанням псевдоспектрального методу та динамічного програмування, показало, що перший метод забезпечує вищу обчислювальну ефективність і кращі показники економії пального.

Формулювання мети дослідження

У статті ставиться задача показати взаємозв'язок обчислювальних аспектів підходів, що застосовуються в автоматизованому проектуванні та оптимальному керуванні, шляхом розроблення алгоритму застосування методів нелінійного математичного програмування до пошуку оптимального за точністю керування електромеханічним об'єктом другого порядку.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо спосіб зведення задачі оптимального керування до задачі нелінійного програмування. Нехай потрібно відшукати мінімум функціонала

$$I(X,U) = \int_0^T F(X,U) dt \quad (1)$$

за умови, що час протікання керованого процесу T заданий, а вектори X і U зв'язані системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dX}{dt} = f(X,U). \quad (2)$$

Припустимо, що є один керувальний вплив, тобто вектор керування U переходить в скаляр u . Розділимо заданий відрізок часу $[0, T]$ на N рівних інтервалів і будемо вважати, що функція $u(t)$ безперервна та лінійна в межах кожного інтервалу (рис. 1). Справедливість такого представлення зростає зі збільшенням числа інтервалів N . Для завдання функції $u(t)$ в даному випадку достатньо визначити ординати точок u_0, u_1, \dots, u_N .

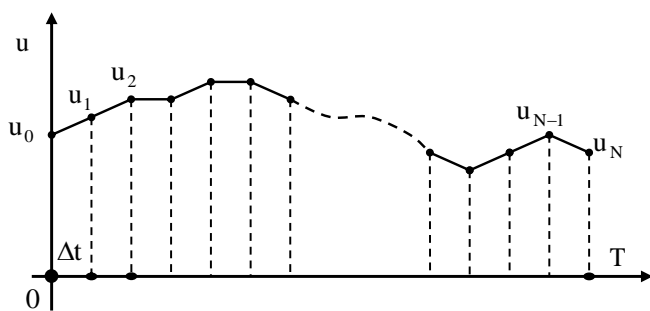


Рис. 1. Кусково-лінійне представлення керуючого впливу

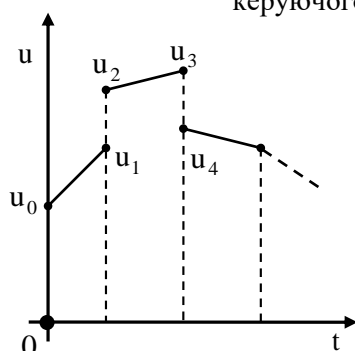


Рис. 2. Функція з розривами першого роду

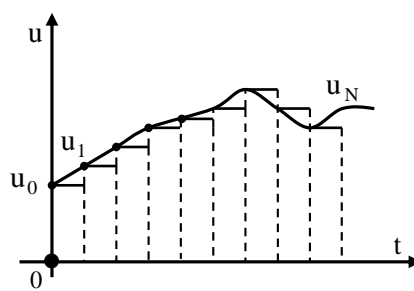


Рис. 3. Кусково-постійна апроксимація шуканої функції керування

зривних функцій (рис. 2) потрібно задавати ординати початку та кінця кожної ділянки, а тому число змінних у розв'язуваній задачі подвоюється. У найпростішому випадку для апроксимації $u(t)$ можна запропонувати кусково-постійну функцію часу (рис. 3). Мета сформульованої задачі, яка розв'язується чисельними методами, складається у визначенні кусково-постійної функції $\{u_i\}$, яка апроксимує шукану функцію $u(t)$. Нехай чисельне інтегрування рівнянь динаміки ОК здійснюється з постійним кроком Δt . На будь-якому довільному інтервалі часу $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$ керування u_i постійне та протягом цього інтервалу не змінюється. Зрозуміло, якщо розглядати клас релейних керувань, то релейне керування можливе апроксимувати тільки кусково-постійною функцією, яка набуває двох можливих значень $\pm u_{max}$.

Якщо керування u_i на i -му інтервалі має постійне значення, то систему рівнянь

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_m, u), \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

можна замінити найпростішою різницевою схемою

$$x_{j, i+1} = x_{j, i} + \Delta t \cdot f_j(x_{1i}, \dots, x_{mi}, u_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

де $N = T / \Delta t$ — число інтервалів часу керованого процесу.

Вираз (4) у векторній формі запису

$$X_{i+1} = X_i + \Delta t \cdot f(X_i, u_i). \quad (5)$$

Для визначеності та простоти, крім рівнянь динаміки об'єкта керування, інші обмеження на розв'язання задачі відсутні. Як видно з поставленої задачі, цільовий функціонал має інтегральну форму. Тоді інтеграл замінюється наступною інтегральною сумою

$$I(X, u) \approx I(X_i, u_i) = \Delta t \cdot \sum_{i=1}^N F(X_i, u_i). \quad (6)$$

Як видно, прямі методи засновані на різних формах апроксимації вектора керуючих впливів $U(t)$ деякою заданою системою функцій. Апроксимація (наближення) $U(t)$ повинна бути обґрунтована з урахуванням різних факторів: функціональних властивостей $U(t)$, необхідної точності розв'язання, методів і засобів розв'язання рівнянь динаміки об'єкта керування. Потрібно враховувати, що складові $u(t)$ є в загальному випадку кусково-безперервними функціями часу, які допускають розриви першого роду. У загальному випадку, вимога безперервності керуючого впливу є необов'язковою, але для представлення роз-

Оскільки вектор початкового стану заданий $X(0)$, то за допомогою рівнянь (4) або (5) можна послідовно виключити вектори X_i з виразу (6). Дійсно, при $X(0) = X_1$ маємо

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 + \Delta t \cdot f(X_1, u_1) = \Phi_2(u_1); \\ X_3 &= X_2 + \Delta t \cdot f(X_2, u_2) = X_1 + \Delta t \cdot f(X_1, u_1) + \Delta t \cdot f(\Phi_2(u_1), u_2) = \\ &= \Phi_2(u_1) + \Delta t \cdot f(\Phi_2(u_1), u_2) = \Phi_3(u_1, u_2); \\ &\dots\dots\dots \\ X_i &= \Phi_{i-1}(u_1, \dots, u_{i-2}) + \Delta t \cdot f(\Phi_{i-1}(u_1, \dots, u_{i-2}), u_{i-1}) = \Phi_i(u_1, \dots, u_{i-1}); \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи вирази (7) у (6), одержуємо цільовий функціонал у вигляді

$$I(X_i, u_i) = \Delta t \cdot \sum_{i=1}^N H_i(u_1, u_2, \dots, u_i) = I(u_1, \dots, u_N), \quad (8)$$

де $H_i(u_1, u_2, \dots, u_i) = F(\Phi_i(u_1, \dots, u_{i-1}), u_i)$.

Отриманий вираз (8) показує, що цільовий функціонал перетворився у функцію кінцевого числа постійних чисел u_1, u_2, \dots, u_N або у функцію кінцевого числа постійних векторів U_1, U_2, \dots, U_N керуючих впливів. Динамічна задача оптимізації перетворилася в статичну задачу з N числом шуканих постійних величин u_1, u_2, \dots, u_N . При цьому функціонал (8) являє собою функцію кінцевого числа змінних. У даному випадку функціонал (8) є функцією N змінних u_1, u_2, \dots, u_N , які обмежені деяким діапазоном можливих значень. Розглянутий скінченновимірний аналог динамічної задачі має наступну важливу особливість. Видно, що $I(u_1, u_2, \dots, u_N)$ є сума кінцевої кількості доданків $H_i(u_1, u_2, \dots, u_i)$, причому H_i залежить тільки від перших i невідомих. Тому функції вигляду (8) називають функціями з послідовним включенням невідомих, оскільки керування u_1, u_2, \dots, u_N включаються до складу функції (8) послідовно в часі через інтервал Δt . Для визначення екстремуму функціонала можна застосувати методи пошуку екстремуму функцій, розроблені в нелінійному програмуванні. У загальному випадку ефективними виявляються алгоритми з комбінацією методів статистичних випробувань (Монте-Карло) і покоординатного спуску. Потрібно врахувати, що, оскільки потужності джерел живлення обмежені, то, виходячи з технічних міркувань, амплітуди керуючих впливів обмежені як зверху, так і знизу, що можна представити обмеженнями наступного характеру

$$|u_i| \leq A_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Дана умова обмежує область змінних u_i N -мірним кубом з центром, що збігається з початком координат N -мірного простору, координатами якого є керуючі впливи u_i . У випадку релейного керування $u_i = \pm A_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. З даної умови випливає, що всі можливі значення, яких можуть набувати керування u_i , являють собою вершини N -мірного куба.

Як було сказано, досить ефективним алгоритмом пошуку екстремуму функціоналів вигляду (8) є комбінація методів статистичних випробувань і покоординатного спуску. В N -мірному кубі, що відповідає умові (9), шляхом статистичних випробувань задається N точок, які приймаються за початкове наближення до оптимуму. З цієї точки початкового наближення починається покоординатний спуск послідовно кожною координатою. Якщо функціонал опуклий, то знайдений локальний мінімум буде одночасно глобальним мінімумом. Одномірний пошук за кожною координатою здійснюється методом упорядкованого перебору. Тому варіювання параметрів оптимізації u_i проводиться з постійним кроком Δu_i .

Реакція на зміну u_i визначається інтегруванням рівнянь динаміки на відрізку $[i\Delta t, T]$, після чого обчислюється цільовий функціонал $I(u_1, u_2, \dots, u_N)$. Знайшовши на даній ітерації таке значення керування u_i в інтервалі його зміни, при якому цільовий функціонал

$I(u_1, u_2, \dots, u_N)$ набуває найменшого значення, величину u_i зберігають і записують як ще одну координату точки наступного наближення. Далі переходять до наступного керування u_{i+1} і за цією змінною оптимізують $I(u_1, u_2, \dots, u_N)$, що виконують для всіх N керувань u_i . Отримані значення u_i будуть складати координати точки отриманого нового наближення. Далі процес повторюється до досягнення необхідної точності

$$I_k(u_1, u_2, \dots, u_N) - I_{k+1}(u_1, u_2, \dots, u_N) < \varepsilon, \quad (10)$$

де k — номер ітерації.

Послідовність варіювання u_i можна вибрати як у бік збільшення u_1, u_2, \dots, u_N , так і навпаки. Після варіювання повного набору $\{u_i\}$ процес повторюється доти, поки зміна кожного u_i не приводить до подальшого поліпшення $I(u_1, u_2, \dots, u_N)$. При наявності декількох керуючих функцій на кожному інтервалі Δt шукається p параметрів оптимізації, де p — число керуючих впливів.

Для методу статистичних випробувань це означає, що при одиничному випробуванні виробляється послідовність випадкових чисел $\{u_p\}_i, i = 1, 2, \dots, N$. При покоординатному пошуку можна діяти дwoяко. В одному випадку процедура пошуку зберігається незмінною. Тоді варіація керувань, наприклад, у бік зростання проводиться в послідовності $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1N}; u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2N}; u_{p1}, u_{p2}, \dots, u_{pN}$. В іншому випадку пошук $u_{11}, \dots, u_{1N}; u_{21}, \dots, u_{2N}; u_{p1}, \dots, u_{pN}$ на будь-якому інтервалі Δt здійснюється методами багатомірного пошуку, наприклад, градієнтним методом. В усіх випадках збільшення числа керуючих функцій приводить до збільшення часу пошуку. Пошук спрощується та кількість обчислень зменшується при релейних керуваннях. Тоді на кожній ітерації при одномірному пошуку необхідно порівняти значення цільового функціонала при $u_i = -A_i$ та $u_i = +A_i$ і вибрати найменше значення $I(u_1, \dots, u_N)$, а відповідну величину u_i запам'ятати як наступне наближення до оптимуму.

Розглянемо об'єкт керування у вигляді двигуна постійного струму, рівняння динаміки якого наступні:

$$p\omega = \frac{c}{J}I; \quad pI = -\frac{c\omega}{L_\gamma} - \frac{R_\gamma I}{L_\gamma} + \frac{u}{L_\gamma}. \quad (11)$$

Потрібно знайти керуючий вплив $u(t)$, який забезпечить оптимальну за точністю стабілізацію швидкості двигуна на рівні завдання ω^* протягом визначеного інтервалу часу $[0, T]$. Початкове значення швидкості $\omega(0) = 0$, тобто задача зводиться до оптимального за точністю пуску двигуна до заданої швидкості ω^* протягом часу T .

Математично мету оптимізації можна визначити як пошук керування, яке забезпечує мінімум квадратичному функціоналу якості

$$I = \int_0^T (\omega - \omega^*)^2 dt. \quad (12)$$

Перетворимо систему двох рівнянь до одного рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{c}{J} \frac{dI}{dt} = \frac{c}{J} \left(\frac{-c\omega - R_\gamma I + u}{L_\gamma} \right) = \frac{c}{JL_\gamma} \left(-c\omega - \frac{R_\gamma J}{c} \frac{d\omega}{dt} + u \right);$$

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} = -\frac{c^2}{JL_\gamma} \omega - \frac{R_\gamma}{L_\gamma} \frac{d\omega}{dt} + \frac{c}{JL_\gamma} u. \quad (13)$$

Здійснюємо дискретизацію задачі заміною диференціального рівняння різницеvim

$$\frac{\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1}}{h^2} = b_1\omega_i + b_2\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h}\right) + m u_i, \quad (14)$$

де $b_1 = -c^2/JL_{я}$; $b_2 = -R_{я}/L_{я}$; $m = c/JL_{я}$.

Тоді буде різницеве рівняння

$$\omega_{i+1} = 2\omega_i - \omega_{i-1} + h^2 \left[b_1\omega_i + b_2\left(\frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{h}\right) + m u_i \right]. \quad (15)$$

Функціонал у дискретній формі перетвориться в кінцеву суму

$$I = \Delta t \sum_{i=1}^N (\omega - \omega_i)^2, \quad (16)$$

де $N = T / \Delta t$ — кількість елементарних ділянок Δt , на які розбитий заданий інтервал $[0, T]$.

Алгоритм обчислень, який визначає оптимальні значення керувань u_i на кожному елементарному інтервалі Δt , представлений на рис. 4. Оптимальне керування $u(t)$ шукаємо в класі релейних керувань, тобто $u_i = \pm A = \pm u_{max}$. Таке обмеження припустиме, тому що теорія оптимального керування вчить, що оптимальні за точністю та швидкодією керування є релейними. Опишемо роботу алгоритму. Спочатку вводяться параметри двигуна та початкове наближення керувань на кожному кроці. Наприклад, нехай $u_i = u_{max}$, як у випадку прямого пуску. Задається інтервал розрахунку $[0, T]$ та кількість кроків N . Визначається величина кроку $h = T / N$. Прирівнюються до нуля всі змінні. Змінній r привласнюється значення цільового функціонала на попередній ітерації, а змінній opt — значення цільового функціонала на даній ітерації. Причому алгоритм побудований так, що змінній opt на наступній ітерації привласнюється найменше для всіх варіацій u_i значення функціонала. Змінна j вказує номер керування u_j , що варіюється. Для кожного значення j порівнюються величини функціонала, що мінімізується, для значень $u_j = +u_{max}$ та $u_j = -u_{max}$ і запам'ятовується найменше значення функціонала в змінній opt з відповідним керуванням u_j , яке також запам'ятовується в масиві керуючих впливів $\{u_j\}$.

Для кожного j розрахунок проводиться в два етапи. Спочатку змінним ω_{i-1} і ω_i привласнюються початкові значення, які отримані на попередньому кроці по j для кращого значення функціонала. Змінній I_j привласнюється кількісне значення змінної I_n . Змінна I_n представляє оптимальне значення функціонала, обчислене для всіх попередніх кроків. Іншими словами, результати кращого попереднього кроку стають початковими умовами для наступного кроку. Далі йде розрахунок рівнянь динаміки об'єкта керування з даних початкових умов на інтервалі часу $[jh, T]$, оскільки від керування u_j на даному j -му кроці залежить уся наступна ділянка траєкторії руху і керування u_j не впливає на всю попередню траєкторію руху. Після розрахунку рівнянь моделі ОК запам'ятовується значення цільового функціонала та величини швидкості, отримані на j -му кроці. При цьому слід пам'ятати, що ω_{i-1} і ω_i просто змінні, а ω_{i+1} є масив, який зберігає значення швидкості на кожному з N кроків. Далі знак керування на тому самому j -му кроці змінюється на протилежний $u_j = -u_j$ і розраховуються знову рівняння моделі ОК при тих же початкових умовах, що і до зміни знаку керування. Знову запам'ятовуються значення швидкості на даному та попередньому кроці, а також зберігається величина функціонала на даному кроці I_{j+1} . Далі порівнюються значення цільового функціонала, розрахованого для всієї траєкторії при різних знаках керування $u_j = \pm u_{max}$. Вибирається найменше з двох значень функціонала і як початкові умови для наступного кроку приймаються величини P_1, P_2 і I_n , що відповідають зазначеному вибору.

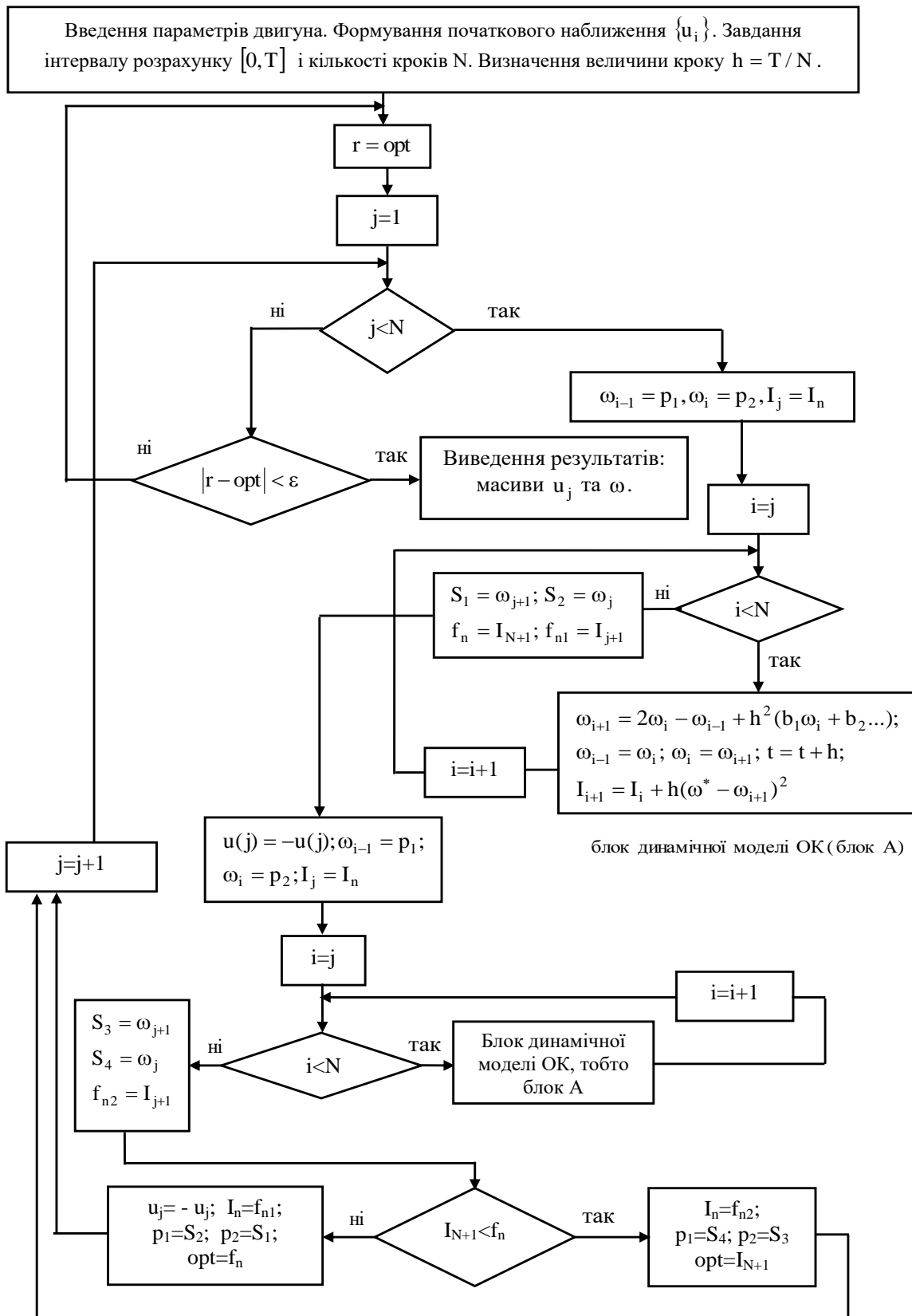


Рис. 4. Алгоритм пошуку оптимального за точністю керування шляхом розв'язання багатомірної задачі нелінійного програмування

Якщо умова вибору меншого значення функціонала в алгоритмі виконується, то керування в j -й комірці масиву $\{u_j\}$ не змінюється. Якщо зазначена умова не виконується, то керування в j -й комірці масиву $\{u_j\}$ змінює знак на протилежний. Далі процес визначення керувань повторюється для наступних кроків у тій же послідовності, що і для розглянутого довільного j -го кроку. Коли $j = N$ і весь масив $\{u_j\}$ заповнений новими значеннями керувань, то можна вважати, що дана ітерація розрахована. Величина opt містить найменше значення функціонала з усіх визначених на даній ітерації. Далі обчислюється модуль різниці між найменшими значеннями функціонала на сусідніх ітераціях. Ітерації (послідовні наближення) будуть повторюватися доти, поки модуль різниці не стане менше якогось наперед заданого малого числа ε . Як тільки необхідна точність буде досягнута, здійснюється виведення результатів у вигляді масивів керувань і відповідних їм значень швидкості на кожному інтервалі Δt .

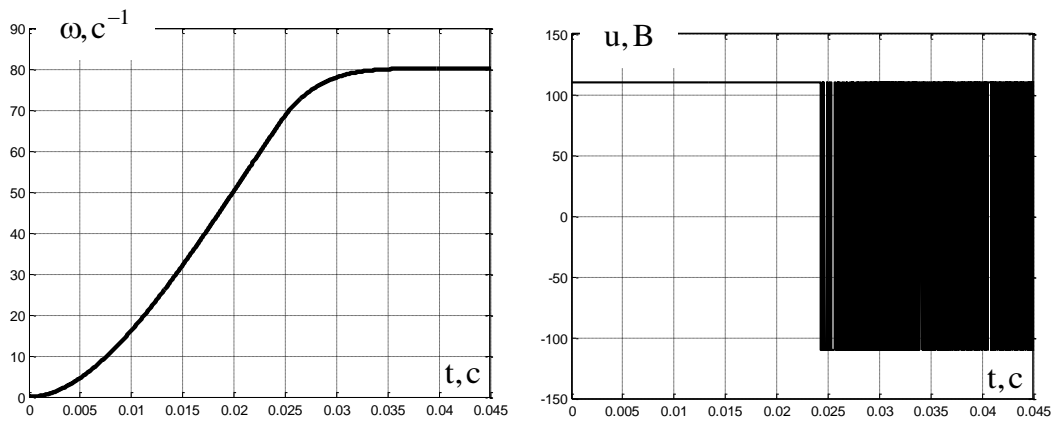


Рис. 5. Оптимальний за точністю пуск двигуна при значних завданнях швидкості

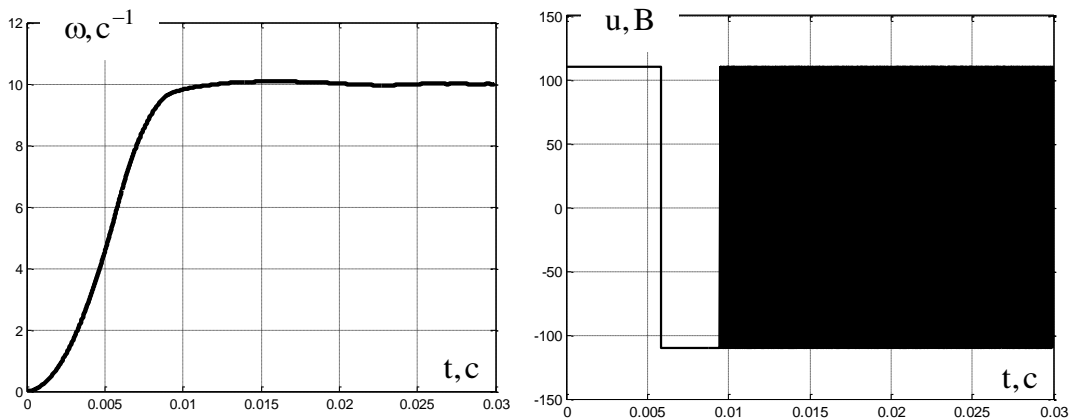


Рис. 6. Оптимальний за точністю пуск двигуна при невеликих завданнях швидкості

У середовищі Matlab написана програма, яка реалізує представлений алгоритм прямого методу пошуку оптимального керування. Диференціальне рівняння (13) перетворюється в різницеве рівняння (15), а функціонал (12) — після його дискретизації — представляє функцію N змінних (16), якими є значення швидкості ω_i , на які накладені обмеження у вигляді рівнянь динамічної моделі (15). Розраховувався оптимальний за точністю пуск двигуна 2ПБ112МГУХЛ4 з наступними технічними даними: $P_n = 750 \text{ Вт}$, $U_n = 110 \text{ В}$, $n_n = 1500 \text{ об/хв}$. Результати розрахунку зображені на рис. 5 і 6, на яких представлені швидкість ω та програмне керування u як функції

часу. При завданнях на швидкість вище десятивідсоткового рівня від номінальної швидкості відпрацювання цієї координати відбувається без перерегулювання (рис. 5). При нижчих завданнях на швидкість спостерігається незначне перерегулювання (рис. 6), якого не вдається уникнути при варіюванні параметрів програми: зменшені кроку h та похибки розрахунку ε . Обмеженням в даному випадку є вигляд функціоналу (12) і, отже, форма запису функції мети (16), які повинні містити в своєму складі похідну від швидкості за часом, щоб уникнути в результаті розрахунку перерегулювання.

Висновки

Сформульовано задачу пошуку оптимального за точністю програмного керування двигуном постійного струму, що забезпечує стабілізацію швидкості. Погано обумовлена крайова задача пошуку оптимального керування, яка впливає з аналітичних рівнянь принципу максимуму, замінюється багатовимірною задачею нелінійного програмування, в якій здійснюється дискретизація керуючого впливу з двома можливими значеннями при релейному керуванні. Обмеження на змінні стану накладаються у вигляді різницевих рівнянь динаміки об'єкта керування. Розроблено алгоритм пошуку керуючого впливу та перевірено його працездатність шляхом створення програми чисельного розв'язання задачі в середовищі Matlab. Таким чином, на прикладі визначення оптимального керування електромеханічним об'єктом показано застосування методів нелінійного математичного програмування в задачах автоматизованого проектування.

Список використаної літератури

1. Paolo Nistri, Optimal control problem via a direct method/ *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Vol. 159, No. 1, 1991, pp. 295-314, DOI: 10.1007/BF01766306.
2. Von Stryk O. Numerical Solution of Optimal Control Problems by Direct Collocation/ *International Series of Numerical Mathematics*, Vol. 111, 1993, pp. 129-143, https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7539-4_10.
3. Diedam H., Sager S. Global optimal control with the direct multiple shooting method/ *Optimal Control Applications and Methods*, Vol. 39, No. 1, 2017, DOI: 10.1002/oca.2324.
4. Marian Gaiceanu, Emil Rosu, Romeo Paduraru, Cristinel Dache, Optimal control development system for electrical drives/ *The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati Fascicle III Electrotechnics Electronics Automatic Control and Informatics*, Vol. 31, No. 1, 2008.
5. Laura V. Perez, Elvio A. Pilotta, Optimal power split in a hybrid electric vehicle using direct transcription of an optimal control problem/ *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 79, Issue 6, 2009, pp. 1959-1970. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.03.006>.
6. Shouyang Wei, Yuan Zou, Fengchun Sun, Onder Christopher, A pseudospectral method for solving optimal control problem of a hybrid tracked vehicle/ *Applied Energy*, Vol. 194, 2017, pp. 588-595. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2016.07.020>.

APPLICATION OF DIRECT METHODS FOR OPTIMAL CONTROL SEARCH IN AUTOMATED DESIGN

Abstract

In modern automated design the problems of determining design parameters, synthesizing optimal control laws and calculating dynamic operating modes are combined into a single interconnected problem of multidisciplinary multi-criteria optimization. After discretization the internal parameters of the object and the values of the control input for this object are combined into a single optimization parameter vector. In this way the design problem is formulated as a multidimensional nonlinear mathematical programming problem, for the solution of which well-developed parametric optimization methods are applied. The unified parameter vector has a block structure and includes design parameters, control input values at the nodes and the values of the state variables of the control object at these nodes. In this paper using the example of solving an optimal control problem by a direct method, the

relationship between automated design and optimal control is demonstrated. A problem of finding a program control that is optimal in terms of accuracy for a direct current motor performing speed stabilization is formulated. The poorly conditioned boundary value problem of finding the optimal control, which follows from the analytical equations of the maximum principle, is replaced by a multidimensional nonlinear programming problem in which the control input is discretized with its two possible values under relay control. Constraints on the state variables are imposed in the form of difference equations describing the dynamics of the control object. An algorithm for determining the control input is developed and its performance is verified by creating a program for the numerical solution of the problem in the Matlab environment. For the speed stabilization system the efficiency of the numerical algorithm for searching the optimal control is tested for operating modes with large and small speed reference values. Thus using the example of determining the optimal control of an electromechanical object the application of nonlinear mathematical programming methods in automated design problems is demonstrated.

References

- [1] Paolo Nistri (1991) *Optimal control problem via a direct method*. Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 159, No. 1, 1991, pp. 295-314, DOI: 10.1007/BF01766306.
- [2] Von Stryk O. (1993) *Numerical Solution of Optimal Control Problems by Direct Collocation*. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 111, 1993, pp. 129-143, DOI:10.1007/978-3-0348-7539-4_10.
- [3] Diedam H. & Sager S. (2017) *Global optimal control with the direct multiple shooting method*. Optimal Control Applications and Methods, Vol. 39, No. 1, 2017, DOI: 10.1002/oca.2324.
- [4] Marian Gaiceanu & Emil Rosu & Romeo Paduraru & Cristinel Dache (2008) *Optimal control development system for electrical drives*. The Annals of "Dunarea de Jos" University of Galati Fascicle III Electrotechnics Electronics Automatic Control and Informatics, Vol. 31, No. 1, 2008.
- [5] Laura V. Perez, & Elvio A. Pilotta, (2009) *Optimal power split in a hybrid electric vehicle using direct transcription of an optimal control problem*. Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 79, Issue 6, 2009, pp. 1959-1970, DOI:10.1016/j.matcom.2007.03.006.
- [6] Shouyang Wei & Yuan Zou & Fengchun Sun & Onder Christopher (2017) *A pseudospectral method for solving optimal control problem of a hybrid tracked vehicle*. Applied Energy, Vol. 194, 2017, pp. 588-595, DOI:10.1016/j.apenergy.2016.07.020.

Надійшла до редколегії 15.01.2026

Прийнята після рецензування 26.02.2026

Опублікована 26.03.2026