

DOI: 10.31319/2519-2884.48.2026.5

УДК: 621.771.2

Максименко О.П., д.т.н., професор, ORCID: 0000-0003-0846-9869,
e-mail: 0976776379max@gmail.com

Нікулін О.В., к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0002-3509-7266, e-mail: av_nikulin@ukr.net

Приймак А.Б., здобувачка третього (доктор філософії) рівня, ORCID: 0009-0009-9070-643X,
e-mail: personalrav_@ukr.net

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Maksimenko Oleg, Doctor of technical sciences, Professor of Department of Metal Pressure Processing

Nikulin Oleksandr, Candidate of technical sciences, Associate Professor of Department of Metal Pressure Processing

Pryimak Anna, Postgraduate student

Dniprovsky State Technical University, Kamianske

МОДЕЛЮВАННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ ПРОКАТУВАННЯ З УРАХУВАННЯМ ПОЗДОВЖНЬОЇ СТІЙКОСТІ ПРОЦЕСУ ПРИ ЗМІНІ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

Визначення граничних умов захвату валками розкату при реалізації процесу обробки є актуальним і має значне практичне значення. В якості критерію виконання умов поздовжньої стійкості прокатки використовується результуюча поздовжніх сил. За результатами математичного моделювання проаналізовано врахування зміни технологічних параметрів та умов рівноваги металу на величину результуючої поздовжніх сил зі збереженням її недодатних значень. При оцінюванні адекватності моделювання виконане порівняння розрахункових і відповідних експериментальних значень відношення кута захвату до коефіцієнта тертя. За отриманими даними верифікація успішна.

Ключові слова: гранична умова; кут захвату; коефіцієнт тертя; поздовжня стійкість; результуюча поздовжніх сил; адекватність розрахунків.

Determination of the limit condition by the engagement angle in rolling process is actual and meaning for the practical value. As the criterion of longitudinal stability, the resultant longitudinal force is doing. According to the results of mathematical modeling, the consideration of changes in technological parameters and metal equilibrium conditions for significance of the resulting longitudinal forces while maintaining their negative values was analyzed. When assessing the adequacy of the modeling, a comparison of the calculated and corresponding experimental values of the ratio of the engagement angle to the friction coefficient was performed. According to the data obtained, the verification was successful.

Keywords: limit condition; engagement angle; friction coefficient; longitudinal stability; resulting longitudinal force; adequacy of calculations.

Постановка проблеми

Теоретичне обґрунтування граничних умов захвату розкату валками в сталому режимі прокатування наведено в роботах О.І. Целікова, О.П. Грудєва та ін., результатами якого користуються при теоретичному оцінюванні можливості впровадження обраних режимів обтиснень [1—3]. У кінцевому рахунку умова реалізації зведена до визначення відношення кута захвату (рад) до коефіцієнту тертя у вигляді:

$$\alpha^{np} \frac{y}{f_y} \approx 2 . \quad (1)$$

Умову (1) отримано, виходячи з рівності нулю горизонтальної проекції суми контактних сил в осередку деформації. При цьому зона відставання розповсюджується на весь осередок деформації ($\gamma = 0$ — кут нейтрального перерізу), нормальний тиск p_x у значній частині контактної зони менше границі текучості $2k$ при дії на метал, що деформується, внутрішніх поздовжніх напружень σ_x . Слід відмітити, що відношення (1) має лише часткове підтвердження (більше одиниці) за експериментальними дослідженнями.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

У досліджах С.В. Макєєва отримані $1,25 \leq \frac{\alpha_y^{np}}{f_y} \leq 1,35$, за результатами досліджень

О.С. Поздєєва і В.В. Ляшкова $1,40 \leq \frac{\alpha_y^{np}}{f_y} \leq 1,45$. Зрозуміло, що гранична умова (1) помітно відрізняється від емпіричних даних, тому потрібне наступне уточнення теоретичних уявлень. Для цього розглядається пластичний плин металу в осередку деформації зі знаходженням поздовжніх напружень і сил [4].

Формулювання мети дослідження

Метою роботи є аналіз впливу внутрішніх поздовжніх нормальних напружень σ_x , які виникають у процесі формозмінення металу в осередку деформації, на захоплюючу здатність валків в усталеному режимі з вивченням залежності стійкості процесу від цих напружень.

Виклад основного матеріалу дослідження

Проаналізуємо умови рівноваги сил на ділянці металу в осередку деформації, що обмежується кутами α і φ (рис. 1). Складаємо рівняння рівноваги сил у поздовжньому напрямку в формі

$$2 \left(- \int_{\varphi}^{\alpha_{cm}} \frac{P_x}{2K_{сеп}} \sin \theta b R_k d\theta + \int_{\varphi}^{\alpha_{cm}} \frac{t_x}{2K_{сеп}} \cos \theta b R_k d\theta \right) = \frac{\sigma_x}{2K_{сеп}} h_x b_x \tag{2}$$

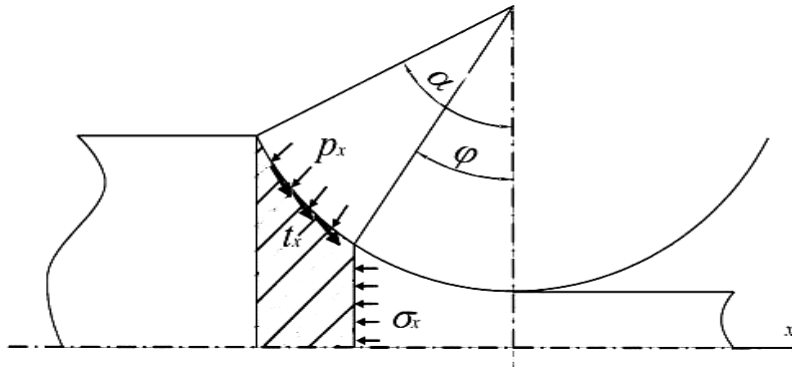


Рис. 1. Внутрішні та контактні напруження в осередку деформації

З рівняння (2) випливає, що контактні сили забезпечують транспортування металу через осередок деформації, долаючи дію внутрішніх сил пластично деформованого металу.

Передбачаючи задачу плоскою та враховуючи умову пластичності та закон тертя за Амонтоном, отримуємо у безрозмірній формі

$$2 \cdot \left(- \int_{\varphi}^{\alpha_y} \frac{P_x}{2k_{сеп}} \sin \theta d\theta + \int_{\varphi}^{\alpha_y} \frac{f_y P_x}{2k_{сеп}} \cos \theta d\theta \right) = \left(\frac{P_x}{2k_{сеп}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{h_1}{R} + \varphi^2 \right), \tag{3}$$

де h_1 — товщина штаби при виході металу з валків; R — радіус валків.

Позначимо $Q_{xnp} = \left(\frac{p_x}{2k_{сер}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{h_1}{R} + \varphi^2 \right)$ поздовжню складову сил. Відмічаємо, що ве-

личину поточної поздовжньої сили можна знайти при розв'язанні диференціального рівняння Т. Кармана відповідно до заданих умов прокатування. Далі знаходимо середнє значення цієї сили по довжині контактної зони

$$Q_{серnp} = \frac{1}{l_d} \int_0^{\alpha_y} Q_{xnp} \cdot R d\varphi = \frac{1}{\alpha_y} \int_0^{\alpha_y} \left(\frac{p_x}{2k_{сер}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{h_1}{R} + \varphi^2 \right) d\varphi. \quad (4)$$

Звертаємо увагу на те, що внутрішня сила $Q_{серnp}$ є силою опору руху металу і завжди спрямована проти руху штаби при прокатуванні. Це сила реакції перешкоджати процесу не може. У зв'язку з викладеним вище, вона має від'ємні значення в процесі деформування штаби, а в граничних випадках досягає нульового значення. Тоді силовим показником [4], якій характеризує граничну умову, є

$$Q_{серnp}^{zp} = 0, \quad (5)$$

що рекомендуємо використовувати при теоретичному визначенні граничних значень відношення $\frac{\alpha_y^{np}}{f_y}$.

Розглянемо методику розрахунку граничних умов прокатки із застосуванням рівняння (5). Попередньо за заданих умов прокатки чисельно вирішується рівняння Т. Кармана з урахуванням закону тертя. За результатами розв'язування будуються епюри розподілу нормальних $\frac{p_x}{2k_{сер}}$ і

дотичних контактних $\frac{t_x}{2k_{сер}}$ напружень, внутрішніх поздовжніх напружень $\frac{\sigma_x}{2k_{сер}}$ і внутрішніх

сил Q_{xnp} за довжиною осередку деформації. Потім за формулою (4) розраховується середня результуюча поздовжніх сил. Далі, змінюючи, наприклад, значення коефіцієнта тертя, досягаємо виконання умови (5). При $\alpha_y = 0,20$; $R = 100$ мм; $h_1 = 3$ мм із послідовним зменшенням коефіцієнта тертя протабульовано значення кута нейтрального перерізу γ , середню результуючу поздовжніх сил $Q_{серnp}$, відношення кутів захвату і тертя $\frac{\alpha_y}{f_y}$. Результати представлені у табл. 1.

Таблиця 1. Результати розрахунків граничного відношення $\frac{\alpha_y}{f_y}$

№ п/п	f_y	$Q_{серnp}$	γ	$\frac{\alpha_y}{f_y}$
1	0,17	-0,0050	0,040	1,17
2	0,15	-0,0018	0,033	1,33
3	0,14	-0,0002	0,028	1,43
4	0,139	0,0	0,027	1,439

Як показують результати розрахунку в перших трьох випадках, процес прокатки буде здійснюватися стійко, тому що сила $Q_{серnp}$ від'ємна. Слід зауважити, що зі зменшенням коефіцієнта тертя стійкість штаби у валках знижується. Як впливає з табл.1, у четвертому випадку

процес відбувається в граничних умовах. При цьому відношення $\frac{\alpha_y}{f_y} = 1.439$, що за значенням суттєво менше, ніж відома з теорії прокатки величина. Також можна підкреслити, що кут нейтрального перерізу в цьому випадку помітно відрізняється від нульового.

На рис. 2 наведені епюри розподілу питомих контактних напружень та поточної поздовжньої сили для граничного стану прокатування (табл. 2). Можна бачити, що у граничному випадку площі розтягуючих (додатних) і стискаючих (від'ємних) сил $Q_{хпр}$ однакові, тому алгебраїчна сума дорівнює нулю, тобто $Q_{серпр}^{ep} = 0$. Для покращення візуального сприйняття графіку на рис. 2 значення показника $Q_{хпр}^*$ наведено у збільшеному в 10 разів масштабі.

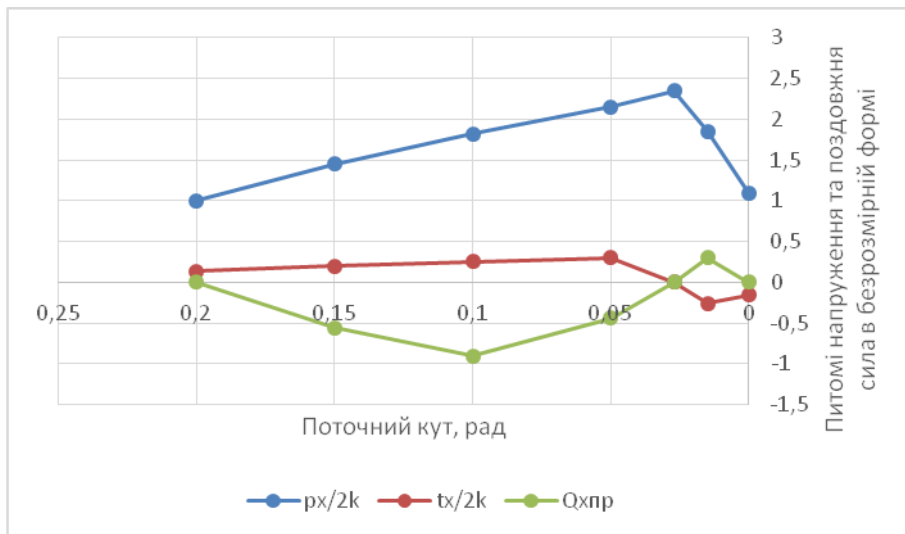


Рис. 2. Епюри розподілу питомих контактних напружень ($\frac{p_x}{2k}, \frac{t_x}{2k}$) та поточної поздовжньої сили ($Q_{хпр}^*$) для граничного стану прокатування ($\frac{\alpha_y}{f_y} = 1.439$)

Таблиця 2. Таблиця розрахункових точок для епюр

Кут φ (рад)	$\frac{p_x}{2k}$	$\frac{t_x}{2k}$	$Q_{хпр}^*$	Характеристика зони
0,200	1	0,139	0	Вхід в осередок
0,15	1,45	0,201	-0,028	Зона відставання
0,1	1,82	0,253	-0,045	Максимальне стискання
0,05	2,15	0,299	-0,022	Наближення до γ
0,027	2,35	0	0	Нейтральний переріз
0,015	1,85	-0,257	0,015	Зона випередження
0	1,1	-0,153	0	Вихід з валків

Аналіз побудованих епюр (рис. 2) дозволяє візуалізувати механізм втрати поздовжньої стійкості. Характерною особливістю отриманих даних є:

1. Максимум нормального тиску ($\frac{P_x}{2k}$): досягається в нейтральному перерізі при $\gamma=0,027$ рад, що відповідає теоретичним уявленням про "підпір" металу. Зміна знаку дотичних напружень ($\frac{t_x}{2k}$): чітко розділяє осередок деформації на зони відставання та випередження.

2. Розподіл поздовжньої сили (Q_{xnp}^*): у досліджуваному граничному випадку сумарна площа ділянок розтягуючих (додатних) та стискаючих (від'ємних) сил є однаковою. Це призводить до того, що середня результуюча поздовжніх сил стає рівною нулю ($\sum Q_x=0$), що свідчить про досягнення межі стійкого процесу прокатування.

При значеннях параметрів $\alpha_y = 0,5$; $R = 100$ мм зі зміною f_y визначимо, за яких значень товщини смуги h_1 процес прокатування стає граничним, тобто $Q_{серпр} = 0$. Результати розрахунків представлені на рис. 3.

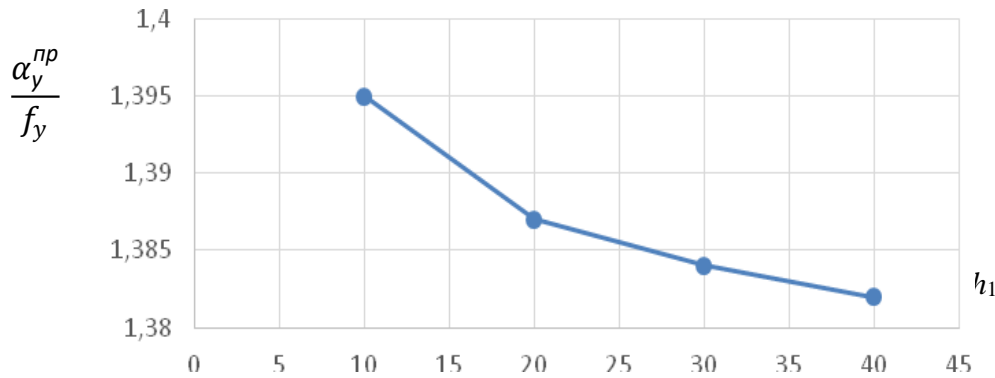


Рис. 3. Вплив кінцевої товщини смуги на граничні умови прокатування

Аналіз графічних даних рис. 3 показує, що при значному збільшенні товщини смуги граничні показники відношення $\frac{\alpha_y^{np}}{f_y}$ змінюються незначно (від 1,395 до 1,382), залишаючись суттєво менше двох.

Далі проаналізуємо вплив заднього питомого натягу смуги $\frac{\sigma_0}{2k_{сер}}$ на граничні умови прокатки при параметрах деформації $\alpha_y = 0,35$; $R = 100$ мм; $h_1 = 20$ мм. Як і раніше, вихід на ці умови забезпечимо за рахунок коефіцієнта тертя. Результати наведено на рис. 4.

Як видно, і в цьому випадку граничні умови прокатування по відношенню до кутів захвату та тертя змінюються від 1,410 до 1,254, що підтверджується експериментальними даними. Зазначаємо, що врахування внутрішніх поздовжніх напружень може пояснити суттєву відмінність (помітне зменшення) цього відношення порівняно з прийнятим теоретичним його значенням рівним 2,0 з наближенням до експериментальних даних. Підкреслюємо, що у всіх граничних випадках прокатування (до появи буксування зразка) нейтральний кут γ приймає значення, що значно перевищують нульове. Що відповідає експериментальним даним О.П. Грудєва та О.П. Чекмарьова [5].

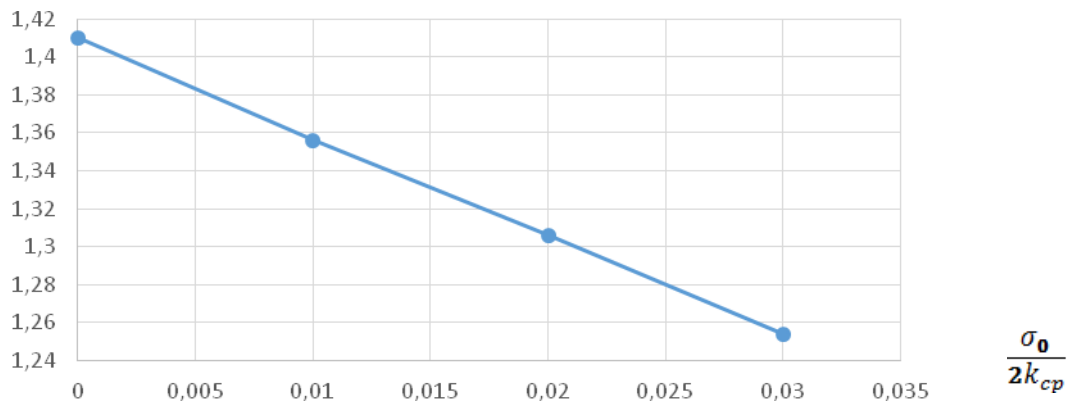


Рис. 4. Вплив заднього питомого натягу штаби на граничні умови прокатування

Відомо, що збільшення натягіння розкату в міжкільтовому проміжку при неперервному прокатуванні сприяє зниженню силових параметрів процесу, що енергетичне вигідно. Проаналізуємо, чим обмежується зростання натягу смуги. Для цього розрахуємо результуючу поздовжніх сил $Q_{серпр}$ та момент прокатування $M_{пр}$ при різних натягах металу для значень параметрів $\alpha_y = 0,25$; $f_y = 0,3$; $R = 300$ мм; $h_1 = 10$ мм. Момент прокатування визначається за епюрами розподілу питомих сил тертя. Результати розрахунків наведено у табл. 3 у безрозмірній формі.

Таблиця 3. Результати розрахунків середньої поздовжніх сил і моменту прокатки

N п/п	Параметри	Величини параметрів						
		0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
1	$\frac{\sigma_0}{2k_{сер}}$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
2	$Q_{серпр}$	-0,0292	-0,0241	-0,0188	-0,0133	-0,0076	-0,0015	0,0049
3	$M_{пр}$	0,099	0,092	0,090	0,088	0,086	0,083	0,081
4	γ , рад	0,068	0,065	0,061	0,057	0,052	0,047	0,04

Аналіз даних табл. 3 показує, що зі збільшенням питомого заднього натягу смуги середня результуюча сила $Q_{серпр}$ за абсолютним значенням зменшується, а при $\frac{\sigma_0}{2k_{сер}} = 0,3$ вона змінює знак, тобто стає додатною, що свідчить про неможливість стійкого процесу прокатування в зазначених умовах. У той же час, зі збільшенням заднього натягу смуги момент прокатування дещо знижується зі зменшенням енерговитрат. Така ж картина спостерігається і при аналізі змін кута нейтрального перерізу γ .

Насамкінець слід відзначити, що збільшення заднього натягу смуги, крім деякого зменшення енерговитрат, призводить до зниження стійкості процесу прокатування.

Висновки

Проведено математичне моделювання граничних умов захвату розкату валками, яке базується на розв'язках диференціального рівняння рівноваги напружень в осередку деформації та визначенні середньої результуючої поздовжніх сил. Встановлено, що використання силового критерію $\sum Q_x \leq 0$ дозволяє досягти високого ступеня збіжності розрахункових і експериментальних даних згідно до поздовжньої сталості процесу. Результати порівняння теоретичних і емпіричних показників підтверджують адекватність розробленої методики, що дає змогу рекоме-

ндувати її для прогнозування межі стійкості процесу прокатування при зміні технологічних параметрів (товщини смуги, коефіцієнту тертя та натягів штаби).

Вперше встановлено причинно-наслідковий зв'язок між внутрішніми поздовжніми нормальними напруженнями в осередку деформації та стійкістю процесу прокатування. Доведено, що досягнення граничного стану захвату обумовлене рівністю інтегральних значень розтягувальних і стискальних поздовжніх сил ($\sum Q_x=0$), що призводить при додатних значеннях $\sum Q_x$ до втрати поздовжньої стійкості навіть при ненульових значеннях кута нейтрального перерізу. Це дозволило уточнити класичну теоретичну умову граничного відношення кута захвату до коефіцієнта тертя, наблизивши її до контролю реальних умов виробництва.

Список використаної літератури

1. Васильов Я.Д., Мінаєв О.А. Теорія поздовжньої прокатки. Донецьк: УНІТЕХ, 2009. 448 с.
2. Danchenko V., Dyja H., Lesik L. Technologia i modelowanie procesow walcowania w wykrojach. Czestochova: Politechnika czestochowska, 2002. 598 s.
3. Максименко О.П., Лясота С.М., Романюк Р.Я. Теорія процесів прокатного, трубного, ковальсько-штампувального, волочильного виробництв. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2011. 264 с.
4. Жучков С. М. Динаміка безперервних сортових станів: монографія. Дніпро: Пороги, 2003. 364 с.
5. Максименко О.П., Нікулін О.В., Самохвал В.М., Лобойко Д.І. Системний підхід, методи досліджень процесів прокатування з аналізом поздовжньої сталості: навч. посіб. Кам'янське: ДДТУ, 2021. 347 с.
6. Ніколаєв В. О., Мазур О.О. Теорія процесів обробки металів тиском: підручник. Запоріжжя: ЗДІА, 2012. 388 с.
7. Огінський І. К. Теоретичні основи поздовжньої стійкості процесу прокатки з натягом. *Теорія і практика металургії*. 2015. № 1-2. С. 45–51.
8. Lenard J. G. Primer on Flat Rolling. 2nd Edition. Oxford: Elsevier, 2014. 312 p.
9. Deng, G., et al. "Evolution of surface roughness and friction coefficient in cold rolling of stainless steel strips." *Journal of Materials Processing Technology*. 2020. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2020.116631.
10. Liu, X., et al. "A comparative study on the contact stress distribution in hot strip rolling using finite element method." *Steel Research International*. 2022. DOI: 10.1002/srin.202100452.
11. Zhang, S., & Wu, H. "Stability analysis of the thin strip rolling process under high-speed conditions." *International Journal of Mechanical Sciences*. 2023. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2023.108145.
12. Wang, J., et al. "Influence of tension leveling on the longitudinal stress distribution of high-strength steel sheets." *Journal of Manufacturing Processes*. 2024. DOI: 10.1016/j.jmapro.2024.01.012.

MODELING OF LIMIT CONDITIONS OF ROLLING TAKING INTO ACCOUNT THE LONGITUDINAL STABILITY OF THE PROCESS WHEN CHANGING TECHNOLOGICAL PARAMETERS

Abstract

The determination of the limit conditions for the roll grip during the manufacturing process is a relevant task with significant practical value. Conventional limit conditions, known from rolling theory, are only partially confirmed by empirical data. This research improves the existing model by analyzing the internal stress state of the metal in the deformation zone and calculating the average resultant longitudinal forces.

Scientific novelty: For the first time, a causal relationship between internal longitudinal forces and the stability of the rolling has established. It is proven that the limit condition for losing longitudinal stability is reaching a zero value of the average resultant longitudinal force ($\sum Q_x=0$). This occurs

due to the equality of the integral areas of compressive and tensile longitudinal forces in the deformation zone.

The proposed method allows for refining theoretical estimates and achieving high compliance between calculated and experimental data. The verification results show that the model accurately predicts the limit of the stable rolling process under varying technological parameters such as strip thickness, friction coefficient, and tension.

References

- [1] Vasylyov YA.D., Minayev O.A. (2009). *Teoriya pozdovzhn'oyi prokatky [Theory of longitudinal rolling]*. Donetsk: UNITEKH. [In Ukrainian].
- [2] Danchenko V., Dyja H. & Lesik L. (2002). *Technologia i modelowanie procesow walcowania w wykrojach [Technology and modeling of rolling processes in blanks]*. Czestochova: Politechnika czestochowska [In Polish].
- [3] Maksimenko O.P., Lyasota S.M. & Romanyuk R.Ya. (2011). *Teoriya protsesiv prokatnoho, trubnoho, kova-l's'ko-shtampoval'noho, volochyl'noho vyrobnystv. [Theory of processes of rolling, pipe, forging-stamping, drawing production]*. Dneprodzerzhinsk: DDTU. [In Ukrainian].
- [4] Zhuckov S.M. (2003) *Dynamika bezperervnykh sortovykh staniv: monohrafiia [Dynamics of continuous variety mills: monograph]*. Dnipro: Porohy. [In Ukrainian].
- [5] Maksymenko O.P., Nikulin O.V., Samokhval V.M. & Loboiko D.I. (2021) *Systemnyy pidkhid, metody doslidzhen' protsesiv prokatuvannya z analizom pozdovzhn'oyi stalosti [Systemic approach, methods of research the rolling processes with analysis of longitudinal stability]: navch. posib. Kam'yanske: DDTU. [In Ukrainian]*.
- [6] Nikolaiev V. O., Mazur O.O. (2012) *Teoriia protsesiv obrobky metaliv tyskom: pidruchnyk. [Theory of metal pressure processing processes: textbook]* Zaporizhzhia: ZDIA. [In Ukrainian].
- [7] Ohynskiy I. K. (2015) *Teoretychni osnovy pozdovzhnoi stiikosti protsesu prokatky z natiatom. [Theoretical basis of longitudinal strength of the tension rolling process]* *Teoriia i praktyka metalurhii*. № 1–2. P. 45–51. [In Ukrainian].
- [8] Lenard J. G. (2014) *Primer on Flat Rolling*. 2nd Edition. Oxford: Elsevier. [in English]
- [9] Deng, G., et al. (2020). "Evolution of surface roughness and friction coefficient in cold rolling of stainless steel strips." *Journal of Materials Processing Technology*. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2020.116631. [in English]
- [10] Liu, X., et al. (2022). "A comparative study on the contact stress distribution in hot strip rolling using finite element method." *Steel Research International*. DOI: 10.1002/srin.202100452. [in English]
- [11] Zhang, S., & Wu, H. (2023). "Stability analysis of the thin strip rolling process under high-speed conditions." *International Journal of Mechanical Sciences*. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2023.108145. [in English]
- [12] Wang, J., et al. (2024). "Influence of tension leveling on the longitudinal stress distribution of high-strength steel sheets." *Journal of Manufacturing Processes*. DOI: 10.1016/j.jmapro.2024.01.012. [in English]

Надійшла до редколегії 04.03.2026

Прийнята після рецензування 12.03.2026

Опублікована 26.03.2026