

DOI: 10.31319/2519-2884.47.2025.12**УДК 621.313.323****Качура О.В.**, к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0002-6338-0974, e-mail: fem@ukr.net**Количев С.В.**, к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0002-1017-5125,

e-mail: kolychev.sergey58@gmail.com

С'янов О.М., д.т.н., професор, ORCID: 0000-0003-4120-4926, email: alexandr.sianov@gmail.com**Зальоткін В.В.**, здобувач третього (доктор філософії) рівня вищої освіти,

email: vladzaletkin@gmail.com

Десна Д.О., здобувач третього (доктор філософії) рівня вищої освіти, email: ipmax99@gmail.com

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Kachura Oleksii, Candidate of technical sciences, Associate Professor of the Department of Electronics and Electronical Communications**Kolychev Serhii**, Candidate of technical sciences, Associate Professor of the Department of Electrical Engineering and Electromechanics**Sianov Oleksandr**, Doctor of technical sciences, Professor of the Department of Electronics and Electronical Communications**Zaletkin Vladyslav**, Postgraduate student**Desna Dmytro**, Postgraduate student

Dniprovsky State Technical University, Kamianske

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИНХРОННОГО ДВИГУНА В РЕАЛЬНИХ КООРДИНАТНИХ ВІСЯХ

У роботі розглядається синхронний двигун в реальних координатних осях. Використання реальних координат — на відміну перетворених — дозволяє проводити аналіз несинусоїдальних режимів роботи синхронних двигунів, гармонійних спотворень та несиметричних станів, які дозволяють зберігати повну інформацію про форму сигналів, враховувати нелінійні електромагнітні параметри та проводити дослідження взаємодії з мережею в перехідних режимах роботи. Наведені математичні перетворення, в результаті яких отримані в матричній формі система диференціальних рівнянь. Повна система диференціальних рівнянь включає вирази, записані відносно напруги, кутової швидкості обертання та кута повороту ротора. Розв'язання системи диференціальних рівнянь проводилось у середовищі Mathcad. Представлені результати моделювання пуску синхронного двигуна.

Ключові слова: синхронний двигун; перетворена система координат; реальна система координат; модель; динамічні характеристики.

The paper considers a synchronous motor in real coordinate axes. The use of real coordinates — as opposed to transformed ones — allows for the analysis of non-sinusoidal operating modes of synchronous motors, harmonic distortions and asymmetric states, which allow for the preservation of complete information about the waveform, the consideration of nonlinear electromagnetic parameters and the study of interaction with the network in transient operating modes. The mathematical transformations are presented, as a result of which a system of differential equations is obtained in matrix form. The complete system of differential equations includes expressions written in terms of voltage, angular velocity and angle of rotation of the rotor. The solution of the system of differential equations was carried out in the Mathcad environment. The results of the simulation of the start-up of a synchronous motor are presented.

Keywords: synchronous motor; transformed coordinate system; real coordinate system; model; dynamic characteristics.

Постановка проблеми

Нині спостерігається зростаючий попит на електричні двигуни, що призводить до збільшення споживання електроенергії. Підприємства металургійної, хімічної, гірничодобувної промисловості, а також енергогенеруючі використовують потужні електричні машини [1—3]. Найбільш поширеним серед них є синхронні електричні машини. Ці машини можуть працювати як у режимі двигуна, так і в режимі генератора, залежно від необхідності. Затребуваність синхронних машин (СМ) як джерел електричної або механічної енергії пояснюється низкою переваг: можливість роботи з коефіцієнтом потужності $\cos\varphi = 1$; високий коефіцієнт корисної дії ($\eta = 97\text{—}98$); простота регулювання частоти обертання [1, 2].

Для забезпечення ефективної роботи синхронних двигунів (СД) потрібне моделювання перехідних процесів, що дає змогу аналізувати їхні характеристики й оптимізувати роботу системи.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Для дослідження статичних, квазістатичних та перехідних процесів СМ представляються у вигляді електричних кіл. Кола ротора представляються електричними контурами, які обертаються. Для того, щоб позбутися періодичних функцій у математичній моделі, виконується перетворення координат. Так, в роботі [4] автори надають детальний огляд перетворень Парка та Кларка, які є фундаментальними інструментами в аналізі та керуванні електричними машинами. Розглядаються математичні основи цих перетворень, їхній історичний розвиток та сучасні застосування. Особлива увага приділяється їх використанню в аналізі динамічних режимів роботи електричних машин та спрощенні математичних моделей для покращення ефективності керування. Стаття також обговорює переваги та обмеження цих перетворень у різних застосуваннях.

Крім перетворених систем координат, широке використання набули не перетворені або реальні координати.

Так, у роботі [5] для моделювання асинхронного електропривода із системою імпульсно-фазового керування була використана модель асинхронного двигуна в реальних координатах. Така модель дає можливість врахувати взаємодію між двигуном та випрямлячем, а також особливості керування тиристорами мостового випрямляча. Отримані результати дозволяють аналізувати динамічні характеристики електропривода та оптимізувати параметри системи керування для забезпечення стабільної та ефективної роботи.

У роботі [6] автори пропонують математичну модель асинхронного двигуна з двоконтурним ротором в реальних координатах, яка враховує ефекти витіснення струму та насичення сталі магнітопроводу. Модель представлена у трьохфазній системі координат для обмоток статора та в координатах α , β для обмоток ротора. Запропоновано методику визначення параметрів схеми двигуна, що підвищує точність моделювання як у сталих, так і в перехідних режимах. Використання реальної системи координат дозволило показати, що несинхронне увімкнення асинхронного двигуна із залишковим магнітним полем ротора потребує синхронізації перед підключенням до мережі, подібно до синхронних машин.

Проведений аналіз використання реальних координат показує актуальність їх використання для аналізу несинусоїдальних режимів роботи, гармонійних спотворень та несиметричних станів електричних машин. Вони дозволяють зберігати повну інформацію про форму сигналів, що критично важливо для діагностики несправностей або дослідження динаміки системи, аналізу нелінійних явищ (наприклад, ефектів насичення магнітного кола). Для бездатчикового керування у реальному часі нерухомі системи можуть бути ефективнішими, оскільки не вимагають синхронізації з обертним полем, що зменшує обчислювальну складність.

Дослідження взаємодії з мережею при неробочих режимах (пуск, гальмування). Розвиток штучного інтелекту (ШІ) та машинного навчання відкриває нові можливості для використання реальних систем координат. Алгоритми ШІ можуть аналізувати трифазні сигнали без попередньої обробки, що підвищує гнучкість систем керування. Для відмовостійких систем аналіз сигналів у реальних системі координат дозволяє швидше виявляти аномалії (наприклад, обрив фази). Впровадження потужних мікроконтролерів дає можливість обробляти дані в реальному часі навіть у складних системах, що робить не перетворені координати конкурентними

для адаптивних систем керування. Тому актуальним є подальші розробки математичних моделей та їх дослідження.

Формулювання мети дослідження

Метою роботи є створення математичної моделі синхронного двигуна в реальних координатах та чисельне моделювання його перехідних процесів.

Виклад основного матеріалу

Математична модель СД будується на базі рівнянь електричної рівноваги. При цьому вводяться такі припущення:

1. Статор і ротор зібрані з листів якісної сталі, внаслідок чого втрати на гістерезис і від вихрових струмів відсутні.
2. Повітряний зазор рівномірний.
3. Магнітна система двигуна ненасичена.
4. Повна симетрія фазних обмоток статора та рівність їхніх параметрів, синусоїдальний розподіл потоку в повітряному зазорі.
5. Рівність параметрів демпферної обмотки по осях d і q .

Фазні обмотки статора представляються у вигляді зосереджених котушок із включеними резисторами. На індукторі СД обмотка збудження розташована по осі d . Демпферну обмотку розглядають короткозамкненою і розташованою в поздовжній d і поперечній q осях обмотки збудження. Струм обмотки збудження позначимо i_f . Просторова модель СМ показана на рис. 1.

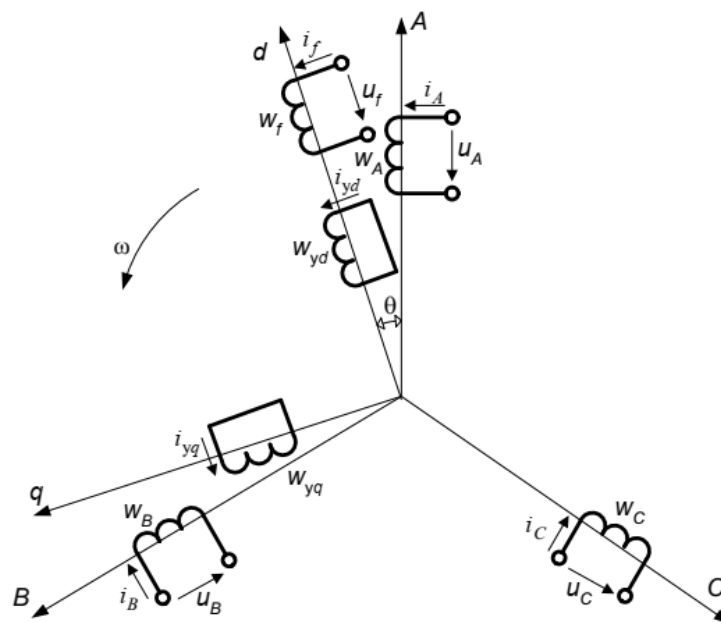


Рис. 1. Просторова модель СД

Під час складання рівнянь приймаються такі припущення [1—3]:

1. Позитивний напрямок обертання зображувальних векторів і координатних осей відповідає обертанню проти годинникової стрілки.
 2. Позитивний напрямок відліку кутів визначається проти годинникової стрілки.
 3. Вісь q випереджає вісь d при обертанні осей проти годинникової стрілки.
 4. Змінні, які є проекціями зображувального вектора на позитивний напрямок осей d або q , мають знак плюс; проекції на негативний напрямок осей отримують знак мінус.
 5. Кути між обертовими осями d і q вимірюються між однойменними осями.
- Система диференціальних рівнянь щодо напруг для обмоток СД має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} u_A = r_A i_A + \frac{d\Psi_A}{dt} \\ u_B = r_B i_B + \frac{d\Psi_B}{dt} \\ u_C = r_C i_C + \frac{d\Psi_C}{dt} \\ u_f = r_f i_f + \frac{d\Psi_f}{dt} \\ 0 = r_d i_d + \frac{d\Psi_d}{dt} \\ 0 = r_q i_q + \frac{d\Psi_q}{dt} \end{array} \right. \quad (1)$$

де $u_A = U \sin(\omega_1 t)$; $u_B = U \sin(\omega_1 t - 2\pi/3)$; $u_C = U \sin(\omega_1 t + 2\pi/3)$; $u_f = U_{зб\gamma d}$. — відповідно, миттєве значення напруги в обмотках фаз статора й обмотці збудження; U — амплітудне значення напруги; ω_1 — кутова частота мережі; $r_A, r_B, r_C, r_f, r_d, r_q$ — активні опори, відповідно, обмоток статора, збудження, а також демпферної обмотки в поздовжній і поперечній осях; $i_A, i_B, i_C, i_f, i_d, i_q$ — миттєві значення струмів в осях; $\Psi_A, \Psi_B, \Psi_C, \Psi_f, \Psi_d, \Psi_q$ — відповідно повні потокозчеплення обмоток фаз статора, обмотки збудження, а також демпферної обмотки в поздовжній і поперечній осях.

Система (1) доповнюється рівнянням руху та кутом повороту ротора

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{m - M_C}{J_\Sigma} ; \quad (2)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_2 . \quad (3)$$

де ω_2 — кутова частота обертання ротора; m — електромагнітний момент; M_C — статичний момент навантаження; J_Σ — сумарний момент інерції рухомих частин; γ — кут повороту ротора.

Щоб привести систему рівнянь (1) до вигляду, зручного для дослідження електромагнітних процесів, необхідно виразити величини потокозчеплень, які входять до неї, через струми у фазах та індуктивності обмоток

$$\begin{aligned} \Psi_A &= L_A i_A + M_{AB} \cos \frac{2\pi}{3} i_B + M_{AC} \cos \frac{2\pi}{3} i_C + M_{Af} \cos p\gamma i_f + M_{Ad} \cos p\gamma i_d + M_{Aq} \cos \left(p\gamma + \frac{\pi}{2} \right) i_q; \\ \Psi_B &= M_{BA} \cos \frac{2\pi}{3} i_A + L_B i_B + M_{BC} \cos \frac{2\pi}{3} i_C + M_{Bf} \cos \left(p\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) i_f + M_{Bd} \cos \left(p\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) i_d + M_{Bq} \cos \left(p\gamma - \frac{\pi}{6} \right) i_q; \\ \Psi_C &= M_{CA} \cos \frac{2\pi}{3} i_A + M_{CB} \cos \frac{2\pi}{3} i_B + L_C i_C + M_{Cf} \cos \left(p\gamma + \frac{2\pi}{3} \right) i_f + M_{Cd} \cos \left(p\gamma + \frac{2\pi}{3} \right) i_d + M_{Cq} \cos \left(p\gamma - \frac{5\pi}{6} \right) i_q; \\ \Psi_f &= M_{fA} \cos p\gamma i_A + M_{fB} \cos \left(p\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) i_B + M_{fC} \cos \left(p\gamma + \frac{2\pi}{3} \right) i_C + L_f i_f + M_{fd} i_d; \\ \Psi_d &= M_{dA} \cos p\gamma i_A + M_{dB} \cos \left(p\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) i_B + M_{dC} \cos \left(p\gamma + \frac{2\pi}{3} \right) i_C + M_{df} i_f + L_d i_d; \\ \Psi_q &= M_{qA} \cos \left(p\gamma + \frac{\pi}{2} \right) i_A + M_{qB} \cos \left(p\gamma - \frac{\pi}{6} \right) i_B + M_{qC} \cos \left(p\gamma - \frac{5\pi}{6} \right) i_C + L_q i_q, \end{aligned}$$

де γ — електричний кут між віссю ротора d , що обертається, і нерухомою віссю фази A ; L_A, L_B, L_C — індуктивності обмоток статора; $M_{AB}, M_{AC}, M_{BA}, M_{BC}, M_{CA}, M_{CB}$ — взаємні індуктивності між фазами обмоток статора; L_f — індуктивність обмотки збудження; $M_{Af}, M_{Bf}, M_{Cf}, M_{fA}, M_{fB}, M_{fC}$ — взаємні індуктивності між обмотками статора та обмоткою збудження; L_d, L_q — індуктивності демпферної обмотки в поздовжній і поперечній осях; $M_{Ad}, M_{Aq}, M_{Bd}, M_{Bq}, M_{Cd}, M_{Cq}, M_{dA}, M_{qA}, M_{dB}, M_{qB}, M_{dC}, M_{qC}$ — взаємні індуктивності між обмотками статора і демпферної обмотки в поздовжній і поперечній осях; M_{fd}, M_{fq} — взаємні індуктивності між обмоткою збудження і демпферною обмоткою в поздовжній і поперечній осях.

У матричній формі рівняння (1) набуде вигляду

$$[u] = [r][i] + \frac{d}{dt}([L(\gamma)][i]),$$

де в матриці $[L(\gamma)]$ кут повороту залежить від часу. Виконавши диференціювання, отримаємо

$$[u] = [r][i] + \frac{d}{dt}([L(\gamma)][i]) + p \frac{d\gamma}{dt} [G(\gamma)][i].$$

З урахуванням (3) отримуємо

$$[u] = [r][i] + \frac{d}{dt}([L(\gamma)][i]) + p\omega_2 [G(\gamma)][i], \quad (4)$$

де $[u] = [u_A \ u_B \ u_C \ u_f \ 0 \ 0]^T$;

$$[r] = \begin{bmatrix} r_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_q \end{bmatrix};$$

$$[i] = [i_A \ i_B \ i_C \ i_f \ i_d \ i_q]^T.$$

Матриці $[L(\gamma)]$ та $[G(\gamma)]$ мають вид:

$$[L(\gamma)] = \begin{bmatrix} L_A & M_{AB} \cos \frac{2\pi}{3} & M_{AC} \cos \frac{2\pi}{3} \\ M_{BA} \cos \frac{2\pi}{3} & L_B & M_{BC} \cos \frac{2\pi}{3} \\ M_{CA} \cos \frac{2\pi}{3} & M_{CB} \cos \frac{2\pi}{3} & L_C \\ M_{fA} \cos p\gamma & M_{fB} \cos \left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{fC} \cos \left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{dA} \cos p\gamma & M_{dB} \cos \left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{dC} \cos \left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{qA} \cos \left(p\gamma + \frac{\pi}{2}\right) & M_{dB} \cos \left(p\gamma - \frac{\pi}{6}\right) & M_{qC} \cos \left(p\gamma - \frac{5\pi}{6}\right) \\ M_{Af} \cos p\gamma & M_{Ad} \cos p\gamma & M_{Aq} \cos \left(p\gamma + \frac{\pi}{2}\right) \\ M_{Bf} \cos \left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{Bd} \cos \left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{Bq} \cos \left(p\gamma - \frac{\pi}{6}\right) \\ M_{Cf} \cos \left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{Cd} \cos \left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{Cq} \cos \left(p\gamma - \frac{5\pi}{6}\right) \\ L_f & M_{fd} & 0 \\ M_{df} & L_d & 0 \\ 0 & 0 & L_q \end{bmatrix}.$$

$$[G(\gamma)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -M_{fA} \sin p\gamma & -M_{fB} \sin\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{fC} \sin\left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -M_{dA} \sin p\gamma & -M_{dB} \sin\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{dC} \sin\left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -M_{qA} \sin\left(p\gamma + \frac{\pi}{2}\right) & -M_{qB} \sin\left(p\gamma - \frac{\pi}{6}\right) & -M_{qC} \sin\left(p\gamma - \frac{5\pi}{6}\right) \\ -M_{Af} \sin p\gamma & -M_{Ad} \sin p\gamma & -M_{Aq} \sin\left(p\gamma + \frac{\pi}{2}\right) \\ -M_{Bf} \sin\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{Bd} \sin\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{Bq} \sin\left(p\gamma - \frac{\pi}{6}\right) \\ -M_{Cf} \sin\left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{Cd} \sin\left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{Cq} \sin\left(p\gamma - \frac{5\pi}{6}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицю $[L(\gamma)]$ для компактності можна представити у вигляді підматриць

$$[L(\gamma)] = \begin{bmatrix} [L] & [L(\gamma)] \\ [L(\gamma)] & [L] \end{bmatrix}$$

де $[L^S]$ — матриця індуктивностей обмотки статора; $[L^f]$ — матриця індуктивностей обмоток ротора; $[L^{RS}]$, $[L^{SR}]$ — матриці взаємних індуктивностей статора і ротора.

$$[L^S] = \begin{bmatrix} L_A & -\frac{1}{2}M_{AB} & -\frac{1}{2}M_{AC} \\ -\frac{1}{2}M_{BA} & L_B & -\frac{1}{2}M_{BC} \\ -\frac{1}{2}M_{CA} & -\frac{1}{2}M_{CB} & L_C \end{bmatrix}; \quad [L^R] = \begin{bmatrix} L_f & M_{fd} & 0 \\ M_{df} & L_d & 0 \\ 0 & 0 & L_d \end{bmatrix};$$

$$[L^{RS}(\gamma)] = [L^{SR}(\gamma)]^T = \begin{bmatrix} M_{fA} \cos p\gamma & M_{fB} \cos\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{fC} \cos\left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{dA} \cos p\gamma & M_{dB} \cos\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{dC} \cos\left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{qA} \cos\left(p\gamma + \frac{\pi}{2}\right) & M_{qB} \cos\left(p\gamma - \frac{\pi}{6}\right) & M_{qC} \cos\left(p\gamma - \frac{5\pi}{6}\right) \end{bmatrix};$$

Матрицю $[G(\gamma)]$ для компактності можна подати у вигляді підматриць

$$[G(\gamma)] = \omega_2 p \begin{bmatrix} [0] & [G^{SR}(\gamma)] \\ [G^{RS}(\gamma)] & [0] \end{bmatrix},$$

де

$$\begin{bmatrix} G^{RS}(\gamma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{SR}(\gamma) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -M_{fA} \sin p\gamma & -M_{fB} \sin\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{fC} \sin\left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -M_{dA} \sin p\gamma & -M_{dB} \sin\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{dC} \sin\left(p\gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -M_{qA} \sin\left(p\gamma + \frac{\pi}{2}\right) & -M_{dB} \sin\left(p\gamma - \frac{\pi}{6}\right) & -M_{qC} \sin\left(p\gamma - \frac{5\pi}{6}\right) \end{bmatrix}$$

Представимо (3) у формі розкритих матриць

$$\begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \\ u_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_f \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} L^S \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L^{SR}(\gamma) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L^{RS}(\gamma) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L^R \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_f \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} +$$

$$+ \omega_2 p \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G^{SR}(\gamma) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G^{RS}(\gamma) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_f \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}.$$

Система рівнянь (1), (2) і (3), що наведена відносно похідних, матиме вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{d[i]}{dt} &= \frac{[u] - [R][i] + \omega_2 p [G(\gamma)][i]}{[L(\gamma)]}; \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{m - M_C}{J}; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_2; \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Для визначення електромагнітного моменту знайдемо запас енергії в системі електромагнітно пов'язаних контурів.

$$W_{EM} = \frac{1}{2} (i_A \Psi_A + i_B \Psi_B + i_C \Psi_C + i_f \Psi_f + i_d \Psi_d + i_q \Psi_q).$$

Тоді електромагнітний момент визначаємо виразом

$$m = \frac{\partial W_{EM}}{\partial \gamma}.$$

Або в матричній формі

$$m = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} [i]^T [L(\gamma)] [i] \right)}{\partial \gamma}.$$

Виконавши аналітичні перетворення, отримаємо рівняння електромагнітного моменту:

$$\begin{aligned} m = & -p \left[M_{Af} i_A i_f \sin(p\gamma) + M_{Ad} i_A i_d \sin(p\gamma) + M_{Aq} i_A i_q \sin\left(p\gamma + \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ & \left. + M_{Bf} i_B i_f \sin\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + M_{Bd} i_B i_d \sin\left(p\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + M_{Bq} i_B i_q \sin\left(p\gamma - \frac{\pi}{6}\right) + \right. \end{aligned}$$

$$+M_{Cf}i_{Cf}\sin\left(p\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)+M_{Cd}i_{Cd}\sin\left(p\gamma+\frac{2\pi}{3}\right)+M_{Cq}i_{Cq}\sin\left(p\gamma-\frac{5\pi}{6}\right)\Bigg].$$

Для того, щоб розв'язати диференціальні рівняння (5), було розроблено алгоритм і створено програму для їх розв'язання в середовищі Mathcad. Було прийнято, що індуктивність взаємодії для всіх пов'язаних котушок однакова. Моделювання режиму пуску СД із навантаженням показано на рис. 2. Пусковий струм СД досягає максимальної амплітуди 60А. Огинання струму не постійне (рис. 2, а), а змінюється з наближенням до максимального значення моменту (рис. 2, б). Ротор після виходу на швидкість обертання 150 рад/с. (рис. 2, б) починає втягуватися в синхронізм. Рис. 2, в — побудований в осях електромагнітного моменту і ковзання; на ньому показано спіраль виходу швидкості обертання на синхронну величину.

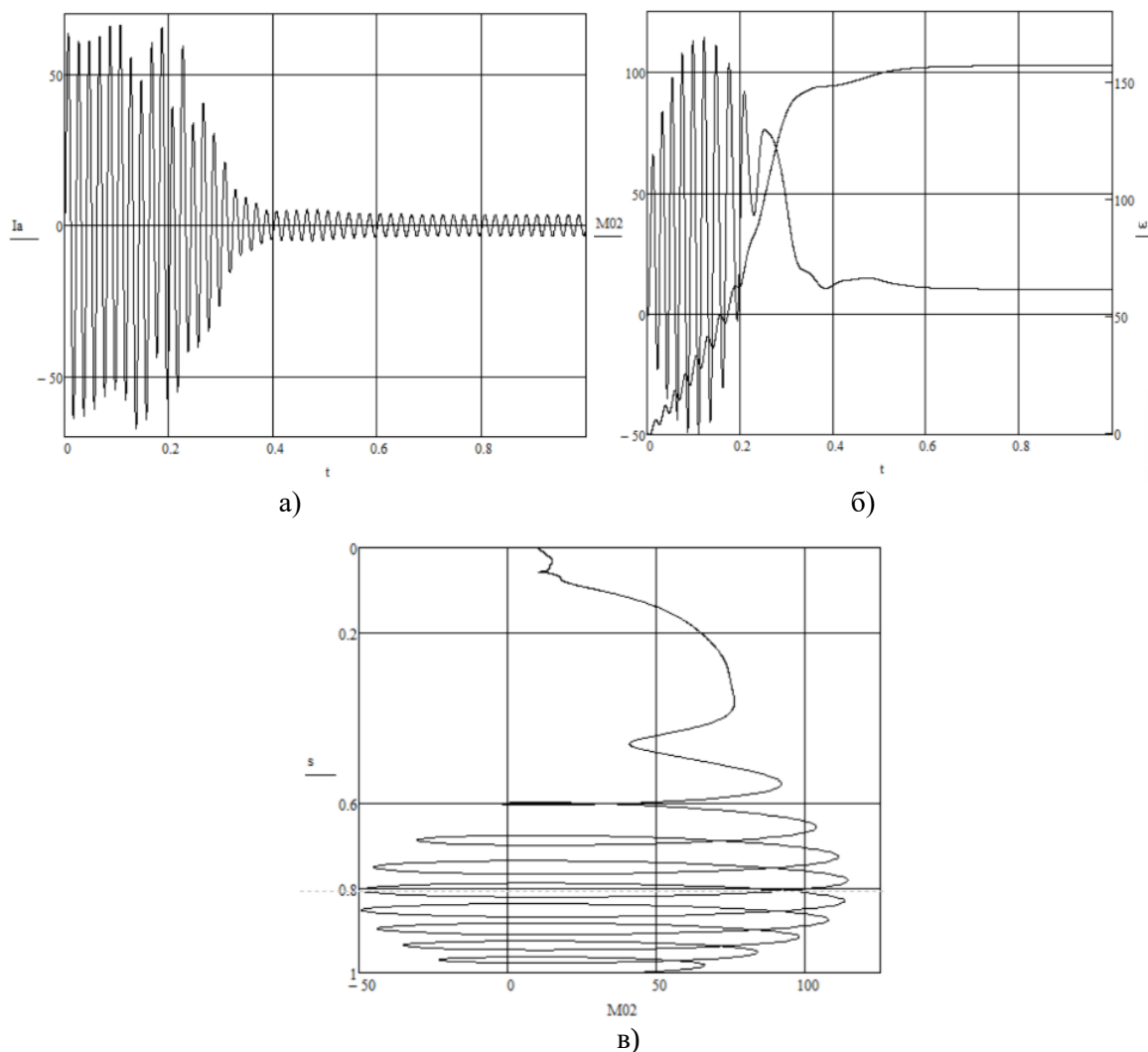


Рис. 2. Пуск синхронного двигуна

Висновки

Створена математична модель синхронного двигуна в реальних координатах дає змогу детально досліджувати динаміку електромеханічних перетворень з урахуванням особливостей роботи машини в перехідних режимах. Опис охоплює фізичні процеси в обмотках статора і ротора, що дозволяє аналізувати вплив різних факторів на стабільність і ефективність роботи синхронного двигуна.

Список використаної літератури

1. Електричні машини і трансформатори /підручник за заг. ред. В.І. Мілих. Х.: ХПІ, 2017. 452 с.
2. Яцун М.А. Електричні машини. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. 464 с.
3. Качура О.В., Количев С.В., С'янов О.М. Індукційні реостати з покращеними масогабаритними показниками для асинхронних двигунів з фазним ротором: монографія. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2011. 209 с.
4. Krause P.C., Wasynczuk O., Sudhoff S.D., Pekarek S.D. Analysis of Electric Machinery and Drive Systems. – 3rd ed. – Hoboken, NJ: Wiley–IEEE Press, 2013. 688 p.
5. Селепина Й., Лишук В., Хвищун М. Математичне моделювання перехідних процесів у регульованому асинхронному електроприводі. *Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Серія: Електроенергетичні та електромеханічні системи. Національний університет "Львівська політехніка" № 818. 2015. С. 3–8.*
6. Сивокобиленко В.Ф., Лисенко В.А. Математичне моделювання режимів перемикання на резервне живлення асинхронних двигунів. *Донбаська національна академія будівництва і архітектури. Вип. 1 (21). 2019. С. 50–55.*

MATHEMATICAL MODEL OF A SYNCHRONOUS MOTOR IN REAL COORDINATES

Abstract

Mathematical modeling of large synchronous motors is usually performed in a transformed coordinate system, which allows for successful reproduction of typical symmetrical operating modes of such electrical machines: starting, synchronization, load surge, etc. At the same time, instead of a picture of real physical processes in the machine windings, such an approach allows observing only changes in the representative vectors of variable physical quantities. The article proposes a mathematical model of a synchronous motor in a phase (real) coordinate system, which makes it possible to analyze asymmetrical modes of the machine, take into account current changes in its parameters under the influence of temperature, saturation of the magnetic circuit steel, emergency effects, etc. In a particular case, when compiling a system of equations for the equilibrium of circuit voltages and rotor motion, typical assumptions were made that ensured the possibility of using a convenient matrix form of their representation and modeling in the Mathcad environment. The resulting matrix of inductive parameters as a function of the rotor rotation angle is presented in a compact form as submatrices of the stator and rotor windings' own and mutual inductances. The rotor windings of the machine are presented in the model by closed circuits with the corresponding parameters along the longitudinal and transverse axes. The expression of the electromagnetic moment is determined by the rate of change of the energy reserve in the system of interconnected circuits. An algorithm and a special program in the Mathcad environment were developed to solve the system of equations. An objective analysis shows that the presented modeling results adequately reflect the physical processes in the modes of starting and synchronization of a large high-voltage synchronous motor.

References

- [1] Milykh V.I. (2017) *Elektrychni mashyny i transformatory [Electrical machines and transformers]*: pidruchnyk za zah. Red. Milykh V.I.. Kh.: KhPI, 2017. 452 p. [in Ukrainian].
- [2] Yatsun M.A. (2011) *Elektrychni mashyny [Electric machines]*. Lviv: Vydavnytstvo Lvivskoi politekhniki, 2011. 464 p. [in Ukrainian].
- [3] Kachura O.V., Kolychev S.V., Sianov O.M. (2011) *Induktsiini reostaty z pokrashchenymy masohabarytnymy pokaznykamy dlia asynkhronnykh dyvyniv z faznym rotorom [Induction rheostats with improved weight and dimensions for asynchronous motors with a phase rotor]*: monohrafiia. Dniprodzerzhynsk: DDTU, 2011. 209 p. [in Ukrainian].
- [4] Krause P.C., Wasynczuk O., Sudhoff S.D., Pekarek S.D. Analysis of Electric Machinery and Drive Systems. – 3rd ed. – Hoboken, NJ: Wiley–IEEE Press, 2013. 688 p.

- [5] Selepyna Y., Lyshuk V., Khvyshchun M. (2015) Matematychnе modeliuвання perekhidnykh protsesiv u rehulovanomu asynkhronnomu elektropryvodi [*Mathematical modeling of transient processes in a controlled asynchronous electric drive*]. Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika". Seriia: Elektroenerhetychni ta elektromekhanichni systemy. Natsionalnyi universytet "Lvivska politekhnika" № 818. 2015. P. 3–8.
- [6] Syvokobylenko V.F., Lysenko V.A. (2019) Matematychnе modeliuвання rezhymiv peremykannia na rezervne zhyvlennia asynkhronnykh dvyhuniv [*Mathematical modeling of switching modes to backup power supply of induction motors*]. Donbaska natsionalna akademiia budivnytstva i arkhitektury. Vyp. 1 (21). 2019. P. 50–55.

Надійшла до редколегії 23.06.2025

Прийнята після рецензування 14.10.2025

Опублікована 23.10.2025