

DOI: 10.31319/2519-2884.47.2025.10

УДК 62-83:681.513.5

Дерець О.Л., к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0001-6432-2592, e-mail: ald_dstu@i.ua
Садовой О.В., д.т.н., професор, ORCID: 0000-0001-9739-3661, e-mail: sadovoyav@ukr.net
Костенко В.І., здобувач третього (доктори філософії) рівня вищої освіти
Шугай Ю.В., здобувач другого (магістерського) рівня вищої освіти
Бездітко М.В., здобувач першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Derets Oleksandr, Candidate of technical sciences, Associate Professor of the Department of Electrical Engineering and Electromechanics
Sadovoi Oleksandr, Doctor of technical sciences, Professor of the Department of Electrical Engineering and Electromechanics
Kostenko Volodymyr, Postgraduate student
Shugai Yurii, master's degree student
Bezditko Mark, undergraduate student
Dniprovsky State Technical University, Kamianske

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ РЕЛЕЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРИВОДАМИ В УМОВАХ ДІЇ РЕАКТИВНОГО МОМЕНТУ ОПОРУ

Актуальність роботи зумовлена необхідністю обґрунтування аналітичної характеристики реактивного моменту опору, яка не вимагає детальної інформації щодо елементів конструкції механізму, але здатна відтворити типові прояви, притаманні силам тертя в моделі релейної системи керування. Метою є використання таких характеристик для завдань, які полягають не у дослідженні фрикційних автоколиваний, а в загальній оцінці динаміки електро-механічних систем. Рішення, запропоноване в цій роботі, полягає у використанні моделі сил тертя у формі безперервної аналітичної функції, точки перегину якої пов'язані з амплітудою пульсацій швидкості в режимі ковзання. Обґрунтована форма та узгодження з параметрами релейних регуляторів налаштування характеристики реактивного моменту опору дозволяють виключити помилкові автоколивання систем керування, забезпечуючи достовірне відтворення статичних та динамічних режимів електроприводу.

Ключові слова: система керування положенням; сухе тертя; метод N -і перемикачів; ковзний режим.

The relevance of the work is due to the need to substantiate the analytical characteristic of the reactive resistance moment, which does not require detailed information about the elements of the mechanism design, but is able to reproduce typical manifestations inherent in friction forces in the model of the relay control system. The goal is to use such characteristics for tasks that do not consist in the study of frictional self-oscillations, but in a general assessment of the dynamics of electromechanical systems. The solution proposed in this work is to use the model of friction forces in the form of a continuous analytical function, the inflection points of which are related to the amplitude of velocity pulsations in the sliding mode. The substantiated form and the adjustment of the reactive resistance moment characteristic in agreement with the parameters of the relay regulators allow to eliminate false self-oscillations of control systems, ensuring reliable reproduction of static and dynamic modes of the electric drive.

Keywords: position control system; dry friction; N -i switching method; sliding mode.

Постановка проблеми

Реактивні моменти опору є проявом дії сил сухого тертя [1] у виконавчих органах електромеханічних систем. Проблема достовірного математичного опису таких сил викликає зростаючий інтерес [2] у умовах розвитку сучасних технік проектування прецизійних систем керу-

вання [3]. Природа сил сухого тертя зумовлює різкий характер їх зміни у безпосередній близькості до стану спокою [4], що може стати причиною втрати стійкості систем керування та виникнення фрикційних автоколивань. Ця проблема загострюється при застосуванні релейних регуляторів, основний режим функціонування яких за своєю природою є автоколивальним [5].

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Аналітичні залежності [2], [3], з використанням яких здійснюється опис реактивних моментів опору різноманітних механізмів, відрізняються складністю на ступенем деталізації [6]—[10]. Безперервні функції, які мають сили в'язкого тертя, можуть мати вигляд многочленів різного ступеня [3]. Сили сухого тертя представляються функціями, що мають злами та навіть розриви [6]. Крім того, ці функції часто мають петлі гістерезису [7]. Уточнені діаграми сил як сухого, так і в'язкого тертя містять падаючі ділянки [8]. Невраховані на етапі проектування від'ємні диференціальні опори здатні спричинити локальну нестійкість електроприводів [9]. Різкозмінний характер залежностей сил сухого тертя та його похідних [10] також створює проблеми зі стійкістю як реальних систем керування, так і моделей [11]. Релейні системи керування самі мають виражені нелінійності, а основним режимом їх роботи є ковзний режим [12]. Використання у моделях таких систем елементів з нелінійними характеристиками [2] є предметом триваючих досліджень [3], [6]. Коректне врахування сил сухого тертя особливо актуальне при дослідженні позиційних електроприводів [13], оскільки в їх системах керування розрив характеристики реактивного моменту опору припадає на точку рівноваги. Однак високий ступінь деталізації характеристик тертя, якому присвячені численні дослідження [6]—[10], не сприяє масовому використанню таких моделей через їх надмірну складність.

Формулювання мети дослідження

Завданням цієї роботи є обґрунтування аналітичної характеристики реактивного моменту опору, яка не вимагає детальної інформації щодо елементів конструкції механізму, але здатна відтворити типові прояви, притаманні силам тертя. Головна увага має належати узгодженню форми цієї характеристики з параметрами ковзних режимів системи керування з метою забезпечення достовірності результатів дослідження динаміки електропривода.

Виклад основного матеріалу

Диференціальні рівняння позиційного електропривода як об'єкта керування [12] при приведенні координат до валу електродвигуна мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} p\varphi &= \omega \\ p\omega &= \varepsilon = \frac{1}{J} \cdot (c \cdot i - M_s - M_f) \\ p\varepsilon &= a = \frac{c}{J} \cdot \frac{u - R \cdot i - c \cdot \omega}{L} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

де φ — кутове положення робочого органу, ε, ω — його кутові прискорення та швидкість, $k_p, R, L, J, c = k\Phi$ — параметри електропривода на основі двигуна постійного струму, a — величина кутового ривка, пропорційна напрузі якірного кола u , i — струм якірного кола, M_s — активний момент навантаження, M_f — реактивний момент навантаження (момент тертя).

У такій моделі дію сил опору враховує момент тертя M_f . Тому для зручності аналізу характеристик сил або моментів опору, і зокрема тертя, розглядатимемо функції $f(\omega)$, які моделюють залежності цих величин від швидкості, у відносних одиницях з подальшим переведенням у розмірність моменту за допомогою множника F , що є амплітудою. Функція

$$f = \text{sign}(\omega) \quad (2)$$

є найпоширенішим варіантом моделювання тертя [1] як у вигляді (2), і у поєднанні з різними доповненнями. Її точка розриву

$$\omega = 0 \quad (3)$$

відповідає стану спокою робочого органу електропривода. У перехідних процесах розриви функції (2) проявляються як поодинокі перемикання, що повністю відповідає логіці дії реактивного моменту опору, представленого в моделі (1) виразом

$$M_f = F \cdot \text{sign}(\omega). \quad (4)$$

Однак, математична модель електропривода (1), (4) містить релейну підсистему, що охоплює частину об'єкта (1)

$$p\omega = \frac{1}{J} \cdot (c \cdot i - M_s - M_f) \quad (5)$$

нелінійним негативним зворотним зв'язком згідно (4). Для системи (5), (4) умова (2) є рівнянням ковзання реле (4). Сам релейний елемент набуває в моделі (1), (4) непритаманну йому роль регулятора, ковзний режим якого виникає [5] в усталеному режимі системи за наявності достатньої амплітуди F його сигналу, тобто за умови

$$|c \cdot i - M_s| < F. \quad (6)$$

Проілюструємо цей факт на прикладі моделі електропривода (1), (4). На рис. 1 представлені результати моделювання процесу динамічного гальмування при $u = 0$ за умови дії реактивного моменту опору з амплітудою $F = M_n$, який за своєю природою є моментом тертя з характеристикою (4). На початку процесу діаграми очікувано демонструють рух з уповільненням, але після наближення до стану спокою процес триває з незгасаючими високочастотними коливаннями, які слід розцінювати як ковзний режим реле (4). При цьому «регулятор» (4) з моменту зупинки «успішно» пригнічує дію електромагнітного моменту, зумовленого існуванням струму в якірному колі. Зауважимо, що при розімкнутому якірному колі модель (1), (4) зводиться до форми (5) і демонструє аналогічні результати дослідження динаміки, різниця полягає лише у відсутності струму: $i = 0$. Короткі інтервали перемикань $M_f(t)$, порівняні з кроком чисельного інтегрування, зумовлюють вкрай малу амплітуду пульсацій $\omega(t)$ на рис. 1. Тому без безпосереднього розгляду діаграм $M_f(t)$ автоколивальний процес може бути прихованим. Присутність «паразитного» ковзного режиму при моделюванні безперервних систем не впливає помітно на їх динаміку, чим пояснюється толерантність дослідників до моделей тертя, побудованих на основі розривних функцій. Однак, умова ковзання реле (3) в спрощеній моделі тертя (2) відповідає умовам виникнення власних ковзних режимів релейних систем керування, що суттєво спотворює результати досліджень позиційних електроприводів. Зазначимо, що використання моделі тертя з лінійною початковою ділянкою [1], [9], найпростіший варіант якої будується на основі функції

$$f = \text{sat}(\omega) \quad (7)$$

замість (2), призводить до результатів, аналогічних наведеним на рис. 1 у частині автоколивань, хоча формально функція (7) не є розривною.

Функції виду (2) і (8), як і багато їх удосконалень [1], [6]—[10] мають нульове значення у стані спокою, що формально відповідає реальним характеристикам всіх реактивних сил опору, і зокрема, сил тертя. Однак насправді взаємні мікропереміщення тертьових поверхонь, що відбуваються з вкрай малими швидкостями [8], які не призводять до розчеплення шорсткостей, не супроводжуються істотним збільшенням сили тертя. Інакше кажучи, в реальному стані спокою має місце як нульовий вплив сил тертя на динаміку системи, так і нейтральна стійкість

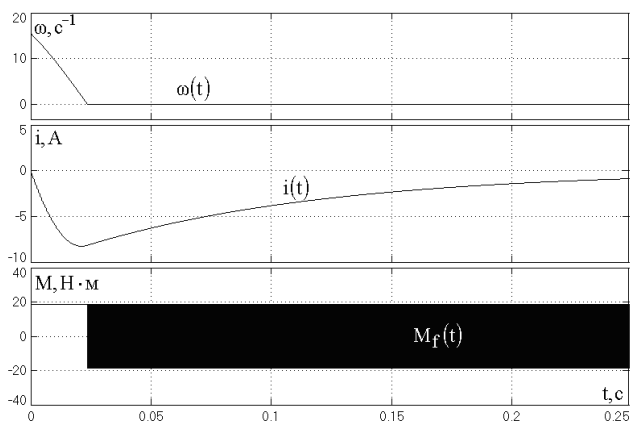


Рис. 1. Перехідні процеси динамічного гальмування електропривода з моделлю тертя (4)

цього стану. Очевидно, що остання умова не реалізується моделями тертя виду (2) і навіть (7), хоча саме вона є визначальною для стійкості положення рівноваги електромеханічних систем.

Виправити цю невідповідність порівняно простими засобами можна шляхом вибору для моделювання сил тертя таких аналітичних функцій, які мають нульову похідну на початку координат (рис. 2). Не розглядаючи у цій роботі вплив в'язкого тертя, врахуємо при виборі моделі тертя також вимогу асимптотичного наближення до константи зі зростанням аргументу. Таким вимогам задовольняють дробово-раціональні функції з однаковими ступенями багаточленів чисельника та знаменника та ненульовим вільним членом у знаменнику. При парних ступенях така функція є парною, за відсутності негативних членів — позитивною, а її симетрію легко забезпечити множенням на знак аргументу. До функцій з переліченими вище властивостями можна віднести

$$M_f = F \cdot \frac{(m\omega)^4}{(m\omega)^4 + 1} \text{sign}(\omega). \quad (8)$$

Налаштування моделі тертя (8) зводиться до встановлення амплітуди F і визначення масштабного коефіцієнта за швидкістю m . Значення F ґрунтується на технічних даних механізму або визначається дослідним шляхом, а в теоретичних та освітніх завданнях призначається як певна частка номінального моменту двигуна. Коефіцієнт m дозволяє зіставити середню швидкість криволінійної ділянки характеристики тертя (8) зі швидкістю ω_s , яка умовно відповідає початку взаємного зсуву елементів механізму, що утворюють пару тертя, як

$$\omega_s = \frac{1}{m}. \quad (9)$$

Для завдань дослідження ковзних режимів електроприводів пропонується побудувати методику визначення ω_s , ґрунтуючись на врахуванні амплітуди пульсацій швидкості $\delta\omega$, що виникають внаслідок перемикання регуляторів електроприводу.

Релейна система керування положенням [12], побудована за каскадним принципом обмеження проміжних координат, описується рівняннями

$$\left. \begin{aligned} u_{R1} = u_{R\varphi} = \omega^* &= \omega_{max} \cdot \text{sign}(\varphi^* - \varphi - K_{\varphi\omega} \cdot \omega - K_{\varphi\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R2} = u_{R\omega} = \varepsilon^* &= \varepsilon_{max} \cdot \text{sign}(\omega^* - \omega - K_{\omega\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R3} = u_{R\varepsilon} = u^* &= u_{max} \cdot \text{sign}(\varepsilon^* - \varepsilon) \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

де $\omega_{max}, \varepsilon_{max}, u_{max}$ — рівні обмеження канонічних координат, яким дорівнюють амплітуди керуючих впливів регуляторів, $K_{\varphi\omega}, K_{\varphi\varepsilon}, K_{\omega\varepsilon}$ — параметри, які є метою оптимізації системи.

Система (1), (10) оптимізується за швидкодією методом перемикань [12] шляхом синтезу коефіцієнтів зворотних зв'язків за формулами

$$K_{\omega\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{max}}{2 \cdot a_{max}}, \quad (11)$$

$$K_{\varphi\varepsilon} = \frac{\omega_{max}}{4 \cdot a_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}^2}{12 \cdot a_{max}^2}, \quad K_{\varphi\omega} = \frac{\omega_{max}}{2 \cdot \varepsilon_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}}{2 \cdot a_{max}}. \quad (12)$$

Рівні обмежень координат визначаються за формулами

$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{J} \cdot i_{max}, \quad a_{max} = \frac{c}{JL} \cdot u_{max}, \quad (13)$$

при обґрунтуванні яких вводиться припущення

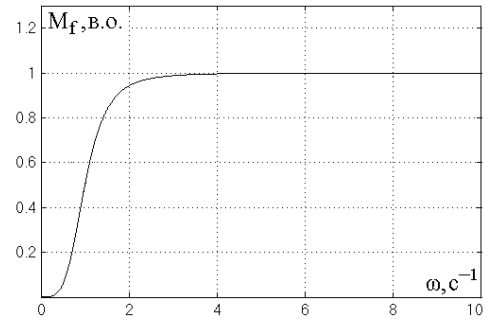


Рис. 2. Діаграма моделі тертя (8)

$$u(t) = \text{const} \Rightarrow a(t) = \text{const}. \quad (14)$$

Частота перемикань ідеальних релейних елементів (14) прямує до нескінченності. Надмірне зростання частоти ковзання неприпустимо практично з погляду зростання втрат у силовому перетворювачі. Обмеження частоти перемикань регуляторів можливе шляхом використання в (14) реле з петлями гістерезису [13], що описуються рівняннями

$$y = \text{gist}(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < -\delta \\ -1 & \text{if } -\delta \leq x \leq \delta = 0 \text{ and } y = -1 \\ +1 & \text{if } -\delta \leq x \leq \delta = 0 \text{ and } y = +1 \\ +1 & \text{if } x > \delta \end{cases}, \quad (15)$$

де δ — ширина петель, що визначає амплітуду пульсацій струму та прискорення.

Результатом роботи регуляторів з петлями гістерезису є формування струмового коридору заданої ширини [13], що опосередковано обмежує частоту перемикань. Для забезпечення астатизму та інваріантності траєкторій системи до навантаження регулятори (10) замкнуті зворотним зв'язком за прискоренням, а не за струмом [12]. Тому в ширині петель гістерезису всіх реле типу (15), застосовуваних в (10) замість ідеальних, закладена амплітуда пульсацій прискорення з відповідним коефіцієнтом зворотного зв'язку.

Відштовхуючись від факту визначеності амплітуди пульсацій прискорення в системі з реле (15), можна аналітично зв'язати з нею амплітуду пульсацій швидкості під час роботи каскаду регуляторів (10) у режимі ковзання. Амплітуда пульсації швидкості $\delta\omega$ дорівнює збільшенню швидкості на інтервалі наростання прискорення від нуля до $\delta\varepsilon$, позначеному на рис. 3 як інтервал стабілізації ривка T_{sa} . В результаті дворазового інтегрування ривка a_{max} отримаємо вираз $\delta\omega = \frac{1}{2} a_{max} T_{sa}^2$. Виключимо часовий інтервал, представивши його як $T_{sa} = \frac{\delta\varepsilon}{a_{max}}$ і знайдемо співвідношення амплітуд пульсацій прискорення та швидкості

$$\delta\omega = \frac{\delta\varepsilon^2}{2a_{max}}. \quad (16)$$

При розробці моделі тертя (8) керуватимемося міркуванням обмеження амплітуди коливань, які здійснюватиме момент тертя при проходженні зображувальною точкою системи криволінійної ділянки характеристики виду (8). Встановивши вимогу, що $\delta\omega$ має не перевищувати чверть середньої швидкості ω_s (рис. 3), отримаємо нерівність $\delta\omega \leq \frac{1}{4} \omega_s$. Підставивши до неї формули (9) і (16), отримаємо вираз для налаштування моделі (8)

$$m \leq \frac{a_{max}}{2\delta\varepsilon^2}. \quad (17)$$

Скориставшись формулою (17), знайдемо рекомендовану верхню межу коефіцієнта масштабування швидкості і виконаємо дослідження системи керування (1), (10) з використанням (15) та (8). На рис. 4 наведені діаграми перехідних процесів розробленої моделі позиційного електропривода. Амплітуда моменту тертя, що моделює механічні втрати, встановлена на рівні $F = 0.2M_H$. У стані спокою реактивний момент, зумовлений силами тертя, пульсує з малою амплітудою, реагуючи на коливання швидкості. У момент часу $t = t_1$ відбувається ударне прикладення активного моменту навантаження величиною M_H , а при $t = t_3$ навантаження миттєво знімається. Стрибки моменту навантаження при $t = t_1$ та $t = t_3$ викликають динамічні похибки, компенсація яких супроводжується локальними дотягуваннями, відображеними на діаграмі моменту тертя. При $t = t_2$ система отримує ступінчасте завдання на позиціонування, яке виконується в умо-

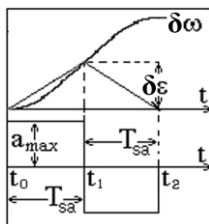


Рис. 3. До обґрунтування параметрів характеристики (8)

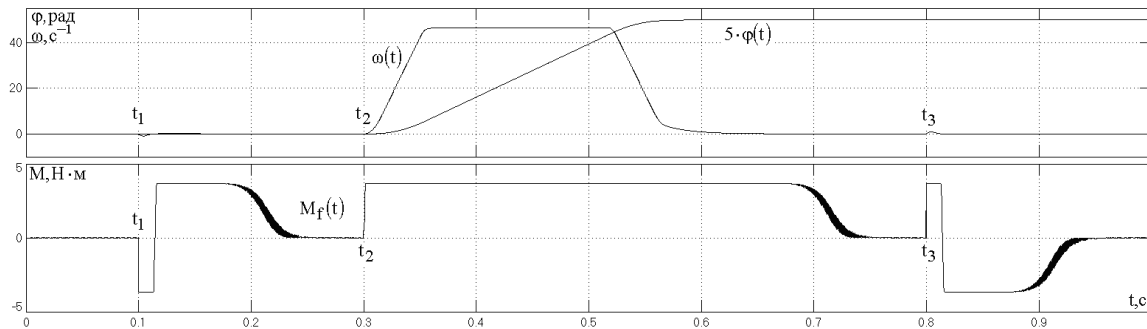


Рис. 4. Перехідні процеси позиційного електропривода з характеристикою тертя (8)

вах спільної дії активного моменту навантаження і реактивного моменту тертя. Останній під час руху має сталу величину, лише на останній стадії гальмування при $t \approx 0,7\text{с}$ його діаграма демонструє серію пульсацій. Слід підкреслити, що в усіх випадках виникнення автоколивань їх амплітуда є помірною і не спричиняє спотворень діаграм основних координат електропривода, форма яких збігається з типовою. Пульсації моменту тертя спостерігаються під час дотягувань, коли система проходить на малій швидкості за порівняно великий час криволінійну ділянку характеристики тертя (8). Отже, отримані результати дослідження цілком відповідають вимогам, сформульованим при виборі характеристики (8) та обґрунтуванні її параметра (17). Зауважимо, що пульсації модельованого реактивного моменту значно посилюються у випадку недотримання умови (17), що чинить руйнівний вплив на ковзні режими регуляторів (10).

Висновки

Дослідження динамічних та статичних режимів позиційного електропривода з релейною системою керування демонструє високий рівень відповідності основних деталей поведінки його моделі перехідним процесам, що відбуваються в реальності. Такого результату досягнуто завдяки вкрай простій, але ретельно обґрунтованій характеристиці сил тертя (8), (17), параметри якої визначаються з урахуванням специфіки ковзних режимів. Застосування формули (17) при налаштуванні характеристики (8) спрямоване на недопущення хибних автоколивань в моделі релейної системи керування, що є актуальним для завдань, які мають на меті не дослідження фрикційних автоколивань як таких, а загальну оцінку динаміки електромеханічних систем, зокрема, оцінку ефективності їх структурно-алгоритмічного синтезу. Результати роботи можуть застосовуватися для врахування дії будь-яких реактивних моментів чи сил опору на електропривод. Перспектива їх розвитку полягає в адаптації запропонованої методики побудови характеристик до досліджень електромеханічних систем з від'ємним в'язким тертям.

Список використаної літератури

1. Müser M. Theory and Simulation of Friction and Lubrication. In: M. Ferrario, G. Ciccotti, K. Binder (eds). Computer Simulations in Condensed Matter Systems: From Materials to Chemical Biology Volume Lecture Notes in Physics, 2006, vol. 704, P.65-104. Springer, Berlin, Heidelberg.
2. Specker T., Buchholz M. and Dietmayer K. "A New Approach of Dynamic Friction Modelling for Simulation and Observation," IFAC Proceedings Volumes, Volume 47, Issue 3, 2014, P. 4523-4528.
3. Schuderer M., Rill G., Schaeffer T. and Schulz C. "Friction modeling from a practical point of view." Multibody System Dynamics, Apr. 2024, P. 1-18.
4. Crowder R., Electric Drives and Electromechanical Systems: Applications and Control. Butterworth-Heinemann, 2019.
5. Utkin V., Poznyak A., Orlov Y., Polyakov A. Road Map for Sliding Mode Control Design. Springer Nature, Switzerland, 2020. 127 pp.
6. Mare J. C. "Friction modelling and simulation at system level - Considerations to load and temperature effects." Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2014, 229 (1), P.27-48.

7. Do N., Ferri A., and Bauchau O. "Efficient Simulation of a Dynamic System With LuGre Friction." *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Oct. 2007, 2(4), P. 281-289.
8. Al-Bender F. "Fundamentals of friction modeling." *Proceedings - ASPE Spring Topical Meeting on Control of Precision Systems*, ASPE 2010, 48.
9. Drumwright E. and Shell D. "Modeling Contact Friction and Joint Friction in Dynamic Robotic Simulation Using the Principle of Maximum Dissipation." *Springer Tracts in Advanced Robotics*. 2010, 68, P. 249-266.
10. Benassi, A. Vanossi, G. Santoro and E. Tosatti. "Parameter-free dissipation in simulated sliding friction." *Physical Review. B, Condensed matter*, 2010, 82(8).
11. Tytiuk V., Chorny O., Mrachkovskiy D., Tryputen M. and Kuznetsov V., "Mathematical model of the closed-loop system of excavator bucket positioning," *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2023, (1), P. 107–114.
12. Derets O., Sadovoi O. and Derets Y., "Synthesis Algorithm of Proximate Time-Optimal Servo Drive with Constraint of State Coordinates." *2019 IEEE 20th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering, CPEE 2019*, 2019, P. 1–4.
13. Derets O., Sadovoi O., Derets Y. and Derets H., "Criterion for Choosing the Integration Step Size for Simulation of Sliding Modes in Electric Drives." *Proceedings of 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering, TCSET 2020*, 2020, P. 796–799.

STUDY OF THE DYNAMICS OF RELAY CONTROL SYSTEMS FOR ELECTRIC DRIVES UNDER THE CONDITION OF THE ACTION OF REACTIVE LOAD TORQUE

Abstract

The relevance of this work stems from the need to use a simple and reliable dry friction model in the study of relay control systems for positional electric drives. The discontinuity condition of the simplest dry friction characteristics coincides with the condition for the existence of a sliding mode position controller for such systems, which negatively impacts the quality of their modeling results.

The goal of this work is to substantiate an analytical characteristic of the reactive torque that does not require detailed information regarding the mechanism's structural elements but is capable of reproducing typical manifestations inherent in friction forces in a relay control system model. The development is focused on the use of such characteristics for tasks involving the general assessment of the dynamics of electromechanical systems operating under the control of relay controllers through their mathematical modeling.

The solution proposed in this work consists of using a friction force model in the form of a continuous analytical function whose inflection points are related to the amplitude of velocity pulsations in the sliding mode. A well-founded characteristic form and parameters matched to the current pulsation amplitude during sliding of relay controllers prevent the occurrence of erroneous self-oscillations in the mathematical model of an automatic position control system. The proposed dry friction characteristic enables modeling of a positioning electric drive in typical static and transient modes for both academic and research applications. The advantages of the results include consideration of the specificity of sliding modes when determining the parameters of the reactive resistance characteristic and the simplicity of its setup procedure, which expands the range of possible applications of the developed model.

Further development of the obtained results, focusing on their use in studying the influence of sliding modes on the course of frictional self-oscillations in electric drives, taking into account viscous friction forces, appears promising.

References

- [1] Müser M. (2006). *Theory and Simulation of Friction and Lubrication*. In: M. Ferrario, G. Ciccotti, K. Binder (eds). *Computer Simulations in Condensed Matter Systems: From Materials*

- to Chemical Biology Volume Lecture Notes in Physics, vol. 704, pp.65-104. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [2] Specker T., Buchholz M. and Dietmayer K. (2014). "A New Approach of Dynamic Friction Modelling for Simulation and Observation," IFAC Proceedings Volumes, Volume 47, Issue 3, 2014, pp. 4523-4528.
 - [3] Schuderer M., Rill G., Schaeffer T. and Schulz C. "Friction modeling from a practical point of view." Multibody System Dynamics, Apr. 2024, pp. 1-18.
 - [4] Crowder R. (2019). Electric Drives and Electromechanical Systems: Applications and Control. Butterworth-Heinemann.
 - [5] Utkin V., Poznyak A., Orlov Y., Polyakov A. (2020). Road Map for Sliding Mode Control Design. Springer Nature, Switzerland. 127 pp.
 - [6] Mare J. C. (2014). "Friction modelling and simulation at system level - Considerations to load and temperature effects." Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 229 (1), pp. 27-48.
 - [7] Do N., Ferri A., and Bauchau O. (2007). "Efficient Simulation of a Dynamic System With LuGre Friction." Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2(4), pp. 281-289.
 - [8] Al-Bender F. (2010). "Fundamentals of friction modeling." Proceedings - ASPE Spring Topical Meeting on Control of Precision Systems, ASPE, 48.
 - [9] Drumwright E. and Shell D. (2010). "Modeling Contact Friction and Joint Friction in Dynamic Robotic Simulation Using the Principle of Maximum Dissipation." Springer Tracts in Advanced Robotics. 68, pp. 249-266.
 - [10] Benassi, A. Vanossi, G. Santoro and E.Tosatti. (2010). "Parameter-free dissipation in simulated sliding friction." Physical Review. B, Condensed matter, 82(8).
 - [11] Tytiuk V., Chorny O., Mrachkovskiy D., Tryputen M. and Kuznetsov V. (2023). "Mathematical model of the closed-loop system of excavator bucket positioning," Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu, (1), pp. 107–114.
 - [12] Derets O., Sadovoi O. and Derets Y., (2019). "Synthesis Algorithm of Proximate Time-Optimal Servo Drive with Constraint of State Coordinates." 2019 IEEE 20th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering, CPEE 2019, pp. 1–4.
 - [13] Derets O., Sadovoi O., Derets Y. and Derets H. (2020). "Criterion for Choosing the Integration Step Size for Simulation of Sliding Modes in Electric Drives." Proceedings of 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering, TCSET 2020, pp. 796–799.

*Надійшла до редакції 21.10.2025
Прийнята після рецензування 22.10.25
Опублікована 23.10.2025*