

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

DOI: 10.31319/2519-2884.47.2025.3

УДК 621.865.8

Романюк О.Д., к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0003-1931-5507,
e-mail: oleksandrromaniuk5@gmail.com

Романюк Я.О., здобувач третього (доктор філософії) рівня вищої освіти,
ORCID: 0009-0001-1343-2211, e-mail: romaniuk.yaroslav1987@gmail.com

Теліпко Л.П., к.т.н., доцент, ORCID: 0000-0003-3165-3920, e-mail: leo46din@gmail.com

Жуков Ф.Ф., здобувач третього (доктор філософії) рівня вищої освіти,
e-mail: f.zhukov@novol.ua

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Romaniuk Oleksandr, Candidate of technical sciences, Associate professor department of Industrial Engineering Department

Romaniuk Yaroslav, Postgraduate Student

Telipko Leonid, Candidate of technical sciences, Associate professor department of Industrial Engineering Department

Zhukov Fedor Postgraduate Student

Dniprovsky State Technical University, Kamianske

СИНТЕЗ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ОБЕРТАЛЬНИХ ВУЗЛІВ ЦИЛІНДРИЧНИХ РЕДУКТОРІВ НА ОСНОВІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЇХ МАС

У даній роботі на основі аналізу елементів та функціональних відношень між ними моделі технічної системи було виведено загальне рівняння маси обертальних вузлів циліндричного редуктора, яке базується на силових параметрах передачі та механічних властивостей матеріалів, що суттєво спрощує процес оптимізації матеріалів та вибору термообробки на етапі попереднього проєктування.

Ключові слова: циліндричний редуктор; маса; зубчасте колесо; вал; обертальний вузол.

In this work, based on the analysis of the elements and their interrelations within the technical system model, a general equation was derived for the mass of rotating units of a cylindrical gear reducer. This equation, based on the power parameters of the transmission and the mechanical properties of materials, substantially simplifies the process of optimizing materials and selecting heat treatment methods at the preliminary design stage.

Keywords: cylindrical gear reducer; mass; gear wheel; shaft; rotating unit.

Постановка проблеми

Синтез конструктивних елементів обертальних вузлів циліндричних редукторів на основі оптимізації їх характеристик є складною та багатогранною інженерною задачею, яку вирішують на базі методів оптимізації параметрів механічних передач. Існуючі сучасні методи ґрунтуються на підходах [1—5], які спрямовані на підвищення ефективності, надійності, компактності та довговічності роботи редукторів, варіюючи такими параметрами передачі як: маса, габаритні розміри, міцність, довговічність, надійність, ергономічність та ін. Відповідні параметри однозначно визначаються тільки по закінченню етапу проєктування, що обумовлює додаткову затрату часу та ресурсів для їх оптимізації, в залежності від поставленої задачі. Тому вибір оптимальної маси обертальних вузлів редуктора на етапі попереднього проєктування з метою економії дорогих або надмірно міцних матеріалів є актуальним.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Задача проєктування обертального вузла механічної передачі з урахуванням оптимізації параметрів складових деталей є багатокритеріальною, так як кількість невідомих величин набагато більше ніж рівнянь зв'язку [6—8]. Крім того, невідомі параметри проєктування є взаємно залежними, що суттєво ускладнює розробку математичної моделі складального вузла механічної передачі.

Дану проблему розв'язують за рахунок зменшення числа невідомих [8,9], використовуючи принцип накладання відповідних обмежень на параметри, що дозволяє, в першому наближенні, розглядати їх як постійні величини. В роботах [9,10] задачу оптимізації маси зубчастого колеса розв'язували з використанням шести основних змінних величин проєктування. Отримані математичні залежності визначення маси зубчастого колеса є функціями взаємно залежних величин, що відповідно ускладнює процес оптимізації.

Формулювання мети дослідження

Метою роботи є розробка математичних залежностей для визначення маси обертальних вузлів циліндричних редукторів на основі силових параметрів передачі та механічних характеристик матеріалу деталей.

Виклад основного матеріалу

Задачу синтезу конструктивних елементів обертальних вузлів циліндричних редукторів на основі оптимізації їх масових характеристик будемо розв'язувати, використовуючи принципи моделювання теорії технічних систем. Згідно цієї теорії, структура системи характеризує внутрішню організацію, яка описується сукупністю елементів та відношень між ними. Така модель дає можливість у загальному вигляді описати функціональні залежності властивостей елементів та відношень між ними, що може бути використано для оптимізації масових характеристик елементів обертальних вузлів циліндричних редукторів.

Модель схеми приводу виконавчого органу машини представлена на рис. 1.

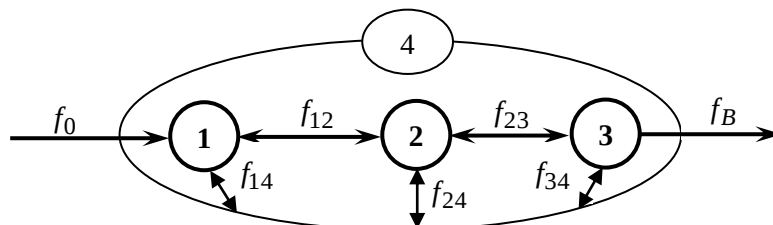


Рис. 1. Модель схеми приводу виконавчого органу машини: 1 — електродвигун; 2 — циліндричний редуктор; 3 — виконавчий орган машини; 4 — границя системи

Границею системи може виступати відповідна дільниця цеху де безпосередньо встановлена технічна система.

Відношення між елементами системи: f_0 — зовнішнє відношення навколишнього середовища до системи; f_{ij} — взаємодія між елементами; f_B — зовнішнє відношення системи до навколишнього середовища.

Функціональна залежність взаємодії між елементами 1—2 та 2—3, яка умовно утворює лінію передачі кінематичних та силових параметрів системи, може бути описана наступним чином:

$$f_{12} = f(N_1, n_1, \omega_1, T_1);$$

$$f_{23} = f(N_2, n_2, \omega_2, T_2),$$

де: N — потужність, кВт; n — кількість обертів валу, хв $^{-1}$; ω — кутова швидкість, л/с; T — обертальний момент, Н $\times$ м.

Взаємодії f_{12} та f_{23} будуть використані при розв'язуванні поставленої задачі синтезу конструктивних елементів обертальних вузлів циліндричних редукторів на основі оптимізації їх масових характеристик, так як вони є вхідними та вихідними параметрами елементу 2 (рис. 1). Даний редуктор, в свою чергу, є системою більш простих елементів – двох обертальних вузлів (швидкохідного валу — I, тихохідного валу — II) та корпусу. Тому побудуємо розширену модель циліндричного одноступінчастого редуктора, яку представлено на рис. 2.

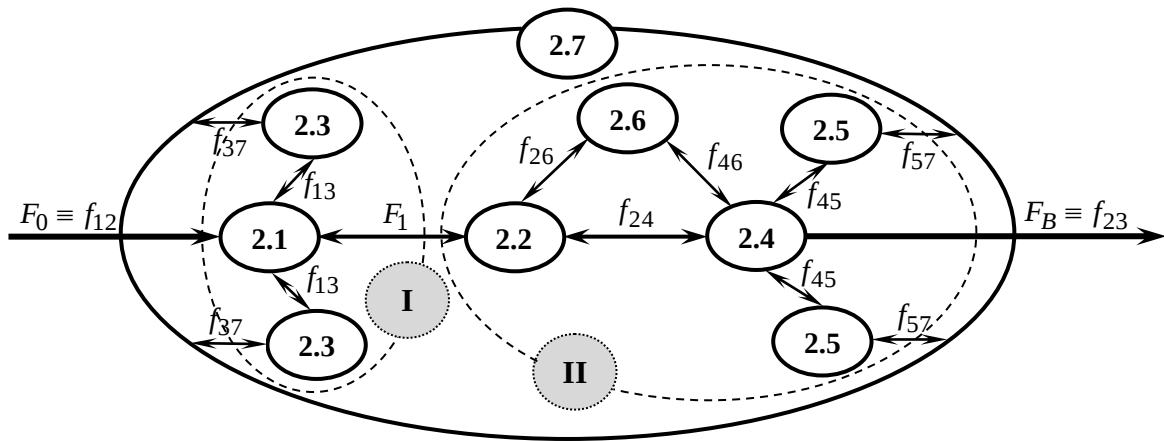


Рис. 2. Розширена модель циліндричного редуктора

Елементами системи є: 2.1 — швидкохідний вал-шестерня; 2.3 — підшипник; 2.2 — колесо; 2.4 — тихохідний вал; 2.5 — підшипник; 2.6 — шпонка призматична; 2.7 — корпус редуктора.

Відношення між елементами системи:

$$\begin{aligned} F_0 &= f(N_1, n_1, \omega_1, T_1), \quad F_B = f(N_2, n_2, \omega_2, T_2), \quad F_1 = f(u, T_1, \bar{F}_j, x_{ij}); \\ f_{13} &= f(x_{ij}, \bar{R}, n_1), \quad f_{45} = f(x_{ij}, \bar{R}, n_2); \\ f_{37} &= f(x_{ij}, \bar{R}_{ij}), \quad f_{57} = f(x_{ij}, \bar{R}_{ij}); \\ f_{24} &= f(T_2, x_{ij}), \quad f_{26} = f(T_2, x_{ij}), \quad f_{46} = f(T_2, x_{ij}), \end{aligned}$$

де: $\bar{F}_j$ — зусилля в зачепленні, H ; u — передаточне число редуктора; x_{ij} — конструктивні параметри (геометричні розміри, ступінь обробки поверхні, допуски та посадки), mm ; $\bar{R}$ — реакції в опорах валу, H ; $\bar{R}_{ij}$ — силова характеристика (динамічна дія на елемент границі системи), H .

Властивості у вигляді функціональної залежності елементів 2.1, 2.2 та 2.4, які утворюють лінію передачі кінематичних та силових параметрів системи, можуть бути описані наступним чином:

$$\begin{aligned} F_{2.1} &= f(E, \rho, \sigma_H, \sigma_F, \tau, x_{ij}); \\ F_{2.2} &= f(E, \rho, \sigma_H, \sigma_F, x_{ij}); \\ F_{2.4} &= f(\rho, \tau, x_{ij}), \end{aligned}$$

де: E — модуль пружності матеріалу, MPa ; σ_H — контактні напруження, MPa ; σ_F — напруження згину, MPa ; ρ — густина матеріалу, kg/m^3 ; τ — напруження при крученні, MPa .

Аналіз елементів 2.1, 2.2 і 2.4, та відношень F_0, F_1, F_B моделі (рис. 2) вказують на одну особливу закономірність, що їх пов'язує — наявність силових параметрів у відповідних функціональних залежностях. Так як розрахункові величини нормальних та дотичних напружень обумовлені зовнішніми силовими факторами, а конструктивні параметри деталей розрахову-

ються з використанням умов міцності, які враховують вплив зовнішніх сил на внутрішні напруження, то відповідно оптимізацію мас обертальних вузлів редуктора можна вирішити за допомогою силових параметрів передачі та механічних характеристик матеріалу, які є вихідними параметрами розрахунку редуктора.

Згідно моделі обертального вузла редуктора (рис. 3), маса його елементів може бути визначена як добуток об'єму на питому вагу матеріалу.

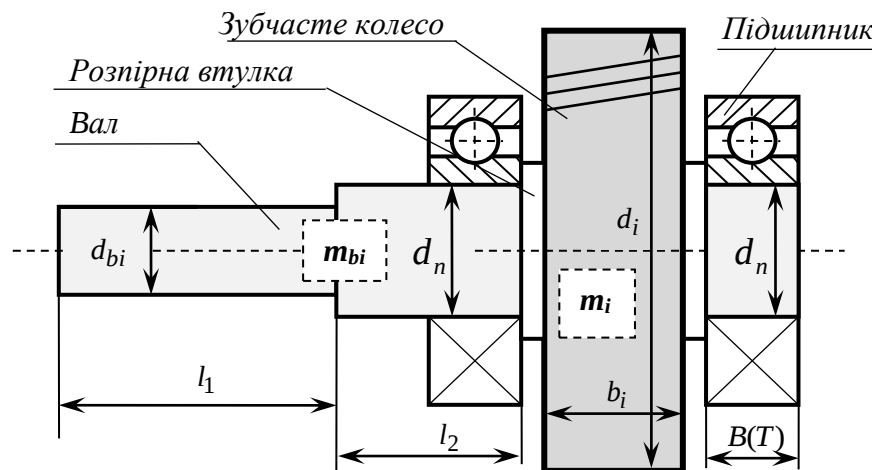


Рис. 3. Модель обертального вузла редуктора

Об'єм зубчастого колеса V_i та об'єм валу V_{bi} є функцією x_{ij} .

Відповідно:

$$V_i = f(m_n, z_i, \beta, b_i, d_i),$$

де: m_n — нормальний модуль зачеплення, мм; z_i — кількість зубів; d_i — дільний діаметр, мм; β — кут нахилу зуба, град; b_i — ширина вінця зубчатого колеса, мм;

$$V_{bi} = f(d_{bi}, d_n, l_1, l_2, B(T)),$$

де: d_{bi} — діаметр вихідної ділянки валу, мм; d_n — діаметр валу під підшипник, мм; l_1 — довжина вихідної ділянки валу, мм; l_2 — довжина ший, мм; $B(T)$ — ширина підшипника (довжина шипа), мм;

З метою спрощення розрахункових залежностей доцільно розглянути окремо визначення маси зубчастих коліс та маси валів.

Розглянемо визначення маси шестерні як добуток об'єму на густину матеріалу

$$m_1 = V_1 \rho = \frac{1}{4} \pi \rho b_1 d_1^2,$$

де: V_1 — об'єм шестерні, м³.

Враховуючи, що

$$d_1 = \frac{m_n z_1}{\cos \beta},$$

а

$$m_n = (0,01 \div 0,02) a_w,$$

$$z_1 = \frac{2 a_w \cos \beta}{(u+1) m_n},$$

то рівняння розрахунку дільного діаметру набуде вигляду

$$d_1 = \frac{2a_w}{u+1},$$

де a_w — міжосьова відстань, мм.

Відповідно рівняння визначення маси шестерні з урахуванням, що $b_1 = \psi_{ba} a_w$ (ψ_{ba} — коефіцієнт ширини зубчастого колеса), прийме наступний вигляд

$$m_1 = \pi \rho \frac{\psi_{ba}}{(u+1)^2} \times a_w^3.$$

Враховуючи функціональні залежності шестерні $F_{2.1}$ та її зв'язок з колесом F_1 , згідно розширеної моделі циліндричного редуктора (рис. 2) виразимо масу шестерні як функцію силових параметрів та механічних властивостей матеріалу.

Так як величина міжосьової відстані визначається рівнянням

$$a_w = K(u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{ET_2 K_{H\beta}}{[\sigma_H]^2 u^2 \psi_{ba}}},$$

та з урахуванням, що $T_2 = T_1 u$ отримаємо

$$m_1 = \left(\pi \rho K^3 E K_{H\beta} \right) \left(\frac{u+1}{u} \right) \left(\frac{T_1}{[\sigma_H]^2} \right),$$

де: $K_{H\beta}$ — коефіцієнт концентрації навантаження на поверхні зуба; K — коефіцієнт враховуючий нахил зуба.

Аналогічним способом визначимо масу колеса

$$m_2 = V_2 \rho = \frac{1}{4} \pi \rho b_2 d_2^2.$$

Враховуючи, що:

$$\begin{aligned} b_2 &= \psi_{ba} a_w; \\ d_2 &= \frac{m_n z_2}{\cos \beta} = d_1 u; \\ m_n &= (0,01 \div 0,02) a_w \\ z_2 &= z_1 u; \\ d_2 &= \frac{2a_w u}{u+1}, \end{aligned}$$

то відповідно, що рівняння маси колеса прийме наступний вигляд

$$m_2 = \pi \rho \frac{\psi_{ba} u^2}{(u+1)^2} \times a_w^3.$$

Враховуючи функціональні залежності колеса $F_{2.2}$ та його зв'язок з шестернею F_1 згідно розширеної моделі циліндричного редуктора (рис. 2) виразимо масу колеса, як функцію силових параметрів та механічних властивостей матеріалу,

$$m_2 = \left(\pi \rho K^3 E K_{H\beta} \right) (u+1) u \left(\frac{T_1}{[\sigma_H]^2} \right).$$

Порівнюючи рівняння маси шестерні та колеса отримаємо,

$$m_2 = m_1 \times u^2.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що величину маси колеса можна визначити за величиною маси шестерні, що, в свою чергу, суттєво спрощує процес оптимізації маси на етапі попереднього проектування редуктора.

Отримані рівняння визначення маси зубчастих коліс є функціями силових параметрів та механічних властивостей матеріалу.

Розглянемо визначення маси валу.

Згідно моделі обертового вузла редуктора (рис. 3), визначення маси валу можна розглядати як добуток об'єму ділянок валу на густину матеріалу.

Маса відповідної ділянки валу розраховується наступним рівнянням

$$m_i = V_i \times \rho,$$

де: V_i — об'єм відповідної ділянки валу.

У нашому випадку загальний вигляд конструкції швидкохідного та тихохідного валів однакові (рис. 3), тоді відповідно

$$m_b = \sum_{i=1}^3 m_i.$$

Об'єм ділянки валу буде визначатись рівняння об'єму циліндра

$$V_i = \frac{1}{4} \pi d_i^2 l_i.$$

Так як із основ конструювання валів відомо, що діаметри ступенів валу проектується на базі діаметру вихідної ділянки валу, а згідно робіт [11,12] довжини ділянок були визначені через діаметр вихідної ділянки валу, що дало можливість отримати загальне рівняння для розрахунку маси валу

$$m_b = \frac{\pi}{4} \rho K_b d_{bi}^3,$$

де K_b — коефіцієнт перерахунку геометричних параметрів валу.

На рис. 4 представлений графік коефіцієнту перерахунку геометричних параметрів валу. Для валів діаметром $d_{bi} \geq 50$ мм коефіцієнт $K_b = \text{const}$ ($K = 7,5$) [12].

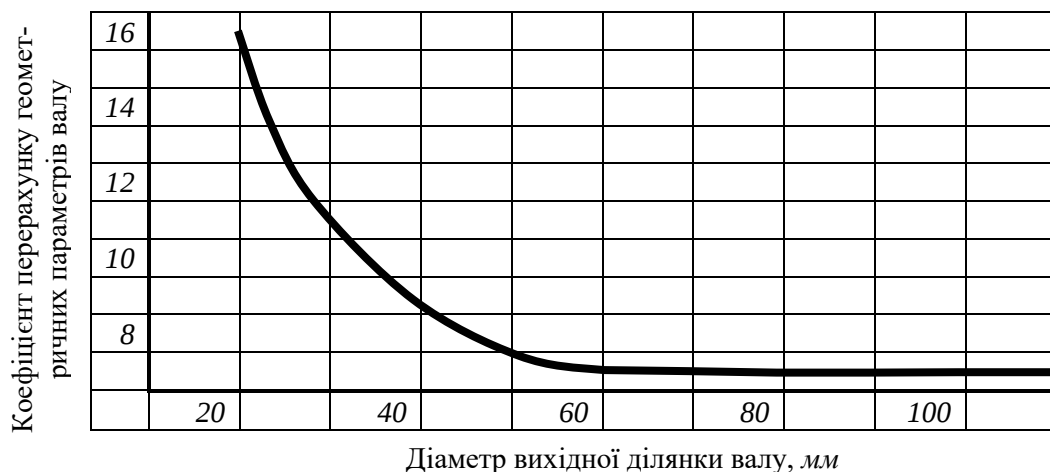


Рис. 4. Графік коефіцієнту перерахунку геометричних параметрів валу

Враховуючи функціональні залежності валу-шестерні F_0 та тихохідного валу F_B , згідно розширеної моделі циліндричного редуктора (рис. 2), виразимо їх масу як функцію силових параметрів та механічних властивостей матеріалу.

Згідно проектного розрахунку валів вихідний діаметр визначається рівнянням

$$d_{bi} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{T_i}{0,2[\tau]}}.$$

Відповідно рівняння маси валу можна записати в наступному вигляді

$$m_{bi} = \frac{5}{4} \pi \rho K_b \left(\frac{T_i}{[\tau]} \right).$$

Для швидкохідного валу

$$m_{b1} = \frac{5}{4} \pi \rho K_b \left(\frac{T_1}{[\tau]} \right),$$

а для тихохідного з урахуванням, що $T_2 = T_1 u$,

$$m_{b2} = \frac{5}{4} \pi \rho K_b \left(\frac{T_1}{[\tau]} \right) u.$$

Таким чином,

$$m_{b2} = m_{b1} u.$$

Як видно з рівняння, маса валу є функцією силових параметрів та механічних властивостей матеріалу.

Встановимо сумарну масу вузлів обертання (швидкохідного валу-шестерні та тихохідного валу в зборі) без урахування маси підшипників.

Загальна маса швидкохідного валу-шестерні визначається рівнянням

$$M_1 = m_1 + m_{b1}.$$

Загальна маса тихохідного валу в зборі (вага шпонки та розпірної втулки не враховується)

$$M_2 = m_2 + m_{b2}.$$

Відповідно сумарна маса обертальних вузлів циліндричного редуктора

$$M_C = M_1 + M_2 = m_1 (1 + u^2) + m_{b1} (1 + u).$$

Таким чином, сумарна маса обертальних вузлів може бути визначена через масу елементів швидкохідного валу

$$M_C = m_1 (1 + u^2) + m_{b1} (1 + u).$$

Отримане рівняння суттєво спрощує процес оцінки (вибору) відповідних матеріалів з метою оптимізації матеріалів та вибору термообробки на етапі попереднього проєктування, так як оцінка може бути виконана за допомогою силових параметрів та механічних властивостей матеріалів, які є вихідними параметрами розрахунку механічних передач.

Висновки

На основі аналізу елементів та функціональних відношень між ними моделі технічної системи було виведено загальне рівняння для розрахунку маси обертальних вузлів циліндричного редуктора, що базується на силових параметрах передачі та внутрішніх напруженнях, які виникають під дією силових факторів в матеріалі, а також механічних характеристик матеріалу. Даний підхід суттєво спрощує процес оцінки (вибору) відповідних матеріалів з метою їх економії, так як оцінка може бути виконана з допомогою силових параметрів та механічних властивостей матеріалів, які є вихідними параметрами розрахунку механічних передач.

Список використаної літератури

1. Li M, Azarm S, Boyars A. A new deterministic approach using sensitivity region measures for multi-objective robust and feasibility robust design optimization. *J Mech Des*. 2006. 128(4). p. 874–883. DOI <https://doi.org/10.1115/1.2202884>
2. Романюк О.Д., Теліпко Л.П. Оптимізація передаточної функції механічної передачі з метою підвищення точності роботи машинного агрегату. *Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету (технічні науки)*. 2019. №34. т. 1. С. 34–38. DOI <https://doi.org/10.31319/2519-2884.34.2019.6>
3. Pengyuan Q., Ning Z., Yanjun P., Yanhu L. Analysis of tooth contact for cylindrical gear with high-order topological modification and misalignment. *Journal of vibroengineering*. 2023. Vol. 25. pp. 189–208. DOI <https://doi.org/10.21595/jve.2022.22753>

4. Sánchez M., Pleguezuelos M., Pedrero J. Influence of profile modifications on meshing stiffness, load sharing, and transmission error of involute spur gears. *Mechanism and Machine Theory*. 2019. Vol. 139. pp. 506–525. DOI <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.05.014>
5. Lin T., He Z. Analytical method for coupled transmission error of helical gear system with machining errors, assembly errors and tooth modifications. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. Vol. 91. pp. 167–182. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.01.005>
6. Vasilieva E., Kuzio I. Optimization of the structural components of gearwheels of cylindrical reducing gears. *Econtechmod. An international quarterly journal on economics in technology, new technologies and modeling processes*. 2014 №1. p. 127–133.
7. Гуліда Е.М., Васильєва О.Е. Оптимізація конструктивних елементів циліндричних зубчастих передач в процесі їх проектування. *Проблеми якості та довговічності зубчастих передач редукторів, їх деталей та вузлів*. 2007. № 21. С. 191–197.
8. Романюк О.Д. Вибір махових мас ланок передаточних механізмів на основі оптимізації передаточної функції. *Математичне моделювання*. 2015. №2(33). С. 52–54.
9. Karadere G., Yilmaz I. Investigation of the Effects of Profile Shift in Helical Gear Mechanisms with Analytical and Numerical Methods. *World Journal of Mechanics*. 2018. Vol. 8. pp. 200–209. DOI <https://doi.org/10.4236/wjm.2018.85015>
10. Романюк О.Д. Основні підходи оптимізації мас зубчастих коліс механічної передачі. *Математичне моделювання*. 2018. №1(38). С. 118–123. DOI [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(38\)2018.129038](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(38)2018.129038)
11. Romaniuk O.D. Mathematical models development of the mechanical transmission units. *Математичне моделювання*. 2019. №2(41). С. 53–61. DOI [https://doi.org/10.31319/2519-8106.2\(41\)2019.185045](https://doi.org/10.31319/2519-8106.2(41)2019.185045)
12. Романюк О.Д. Оптимізація мас валів і підшипників механічної передачі. *Математичне моделювання*. 2020. №1(42). С. 41–47. DOI [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(42\)2020.206940](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(42)2020.206940)

SYNTHESIS OF STRUCTURAL ELEMENTS OF ROTATING UNITS OF CYLINDRICAL GEAR REDUCERS BASED ON MASS OPTIMIZATION

Abstract

The problem of designing a rotating unit of a mechanical transmission, taking into account the optimization of the parameters of its component parts, is multi-criteria in nature, since the number of unknowns significantly exceeds the number of constraint equations. Moreover, the unknown design parameters are interdependent. Therefore, selecting the optimal mass of the rotating units of a gearbox at the preliminary design stage, in order to save expensive or excessively strong materials, is a relevant task.

The aim of this work is to develop mathematical relationships for determining the mass of the rotating units of cylindrical gear reducers based on the power parameters of the transmission and the mechanical characteristics of the component materials.

The problem of synthesizing the structural elements of the rotating units of cylindrical gear reducers based on the optimization of their mass characteristics was solved using the principles of modeling from the theory of technical systems. According to this theory, the structure of a system - the type of object - characterizes its internal organization, which is described by a set of elements and relationships between them in the form of a functional dependence. The developed models of the drive mechanism of the machine's working element and the cylindrical reducer made it possible to identify the general functional dependence of the rotating unit components on the power parameters of the transmission and the mechanical properties of the materials.

Based on the analysis of the elements and their interrelations within the technical system model, a general equation was derived for calculating the mass of the rotating units of a cylindrical gear reducer. This equation is based on the power parameters of the transmission, the internal stresses arising in the material under load, and the mechanical characteristics of the material. This approach significantly simplifies the process of evaluating (and selecting) appropriate materials at the preliminary design stage, since the evaluation can be performed using only the power parameters and the mechanical properties of materials, which are the initial parameters in the calculation of mechanical transmissions.

References

- [1] Li, M., Azarm, S., Boyars, A. (2006). A new deterministic approach using sensitivity region measures for multi-objective robust and feasibility robust design optimization. *J Mech Des*, (128(4)), 874–883. [in English]. DOI <https://doi.org/10.1115/1.2202884>
- [2] Romaniuk, O.D., & Telipko, L.P. (2019). Optyimizacija peredatochnoji funkciji mekhanichnoji peredachi z metoju pidvyshhennja tochnosti roboty mashynnogho aghreghatu [Optimization of the transmission function of the mechanical transmission in order to improve the accuracy of the machine unit]. *Zbirnyk naukovykh pracj Dniprovskogho derzhavnogho tekhnichnogho universytetu (tekhnichni nauky)*, (1(34)), 34–38. [in Ukrainian]. DOI <https://doi.org/10.31319/2519-2884.34.2019.6>
- [3] Pengyuan, Q., Ning, Z., Yanjun, P., Yanhu, L. (2023). Analysis of tooth contact for cylindrical gear with high-order topological modification and misalignment. *Journal of vibroengineering*. 25. 189–208. [in English]. DOI <https://doi.org/10.21595/jve.2022.22753>
- [4] Sánchez, M., Pleguezuelos, M., Pedrero, J. (2019). Influence of profile modifications on meshing stiffness, load sharing, and transmission error of involute spur gears. *Mechanism and Machine Theory*. 139. 506–525. [in English]. DOI <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.05.014>
- [5] Lin, T., & He, Z. (2017). Analytical method for coupled transmission error of helical gear system with machining errors, assembly errors and tooth modifications. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 91. 167–182. [in English]. DOI <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.01.005>
- [6] Vasilieva, E., & Kuzio, I. (2014). Optimization of the structural components of gearwheels of cylindrical reducing gears. *Econtechmod. An international quarterly journal on economics in technology, new technologies and modeling processes*, (1), 127–133. [in English]
- [7] Gulida, E.M., & Vasylieva, O.E. (2007). Optyimizacija konstruktyvnykh elementiv cylindrychnykh zubchastykh peredach v procesi jikh proektuvannja [Optimization of structural elements of cylindrical gears in the process of their design]. *Problemy jakosti ta dovghovichnosti zubchastykh peredach reduktoriv, jikh detalej ta vuzliv*, (21), 191–197. [in Ukrainian]
- [8] Romaniuk, O.D. (2015). Vybir makhovykh mas lanok peredatochnykh mekhanizmiv na osnovi optyimizaciji peredatochnoji funkciji [The choice of wing parts by weight of gear mechanisms based on optimizing the transfer function]. *Matematychni modeljuvannja*, (2(33)), 52–54. [in Ukrainian]
- [9] Karadere, G., & Yilmaz, I. (2018) Investigation of the Effects of Profile Shift in Helical Gear Mechanisms with Analytical and Numerical Methods. *World Journal of Mechanics*. 8. 200–209. [in English]. DOI <https://doi.org/10.4236/wjm.2018.85015>
- [10] Romaniuk, O.D. (2018). Osnovni pidkhody optyimizaciji mas zubchastykh kolis mekhanichnoji peredachi [Basic approaches to mass optimization of toothed wheels of mechanical transmission]. *Matematychni modeljuvannja*, (1(38)), 118–123. [in Ukrainian]. DOI [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(38\)2018.129038](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(38)2018.129038)
- [11] Romaniuk, O.D. (2019). [Development of rotary units mechanical transmission mathematical model]. *Matematychni modeljuvannja*, (2(41)), 53–61. [in English]. DOI [https://doi.org/10.31319/2519-8106.2\(41\)2019.185045](https://doi.org/10.31319/2519-8106.2(41)2019.185045)
- [12] Romaniuk, O.D. (2020). Optimizatsiya mas valiv i pidshipnikiv mekhanichnoji peredachi [Optimization of masses of shafts and bearings of mechanical transfer]. *Matematychni modeljuvannja*, (1(42)), 41–47. [in Ukrainian]. DOI [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(42\)2020.206940](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(42)2020.206940)

Надійшла до редакції 13.10.2025

Прийнята після рецензування 20.10.25

Опублікована 23.10.2025