

ГАЛУЗЕВЕ МАШИНОБУДУВАННЯ. ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

DOI: 10.31319/2519-2884.38.2021.5

УДК 539.3/6(075.8)

В.А. Ропай, д.т.н., професор, varop46@gmail.com

Л.П. Теліпко, к.т.н., доцент, leo46din@gmail.com

О.Д. Романюк, к.т.н., доцент, oleksandrromaniuk5@gmail.com

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

УНІВЕРСАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ БАГАТОПРОГІННИХ БАЛОК

У даній роботі пропонується новий метод по розкриттю статичної невизначуванності багатопрогінних балок на підставі універсального рівняння пружної лінії балки. Цей метод вільний від графічних побудов і дозволяє оптимізувати отримання додаткових рівнянь переміщень для "зайвих" невідомих, так як наступне рівняння відрізняється від попереднього тільки додаванням ще одного доданку з новим навантаженням. Пропонована процедура забезпечує оптимальне розв'язування практично будь-якої задачі з розкриття статичної невизначуванності багатопрогінних балок.

Ключові слова: балка; рівняння; прогін; метод; статична невизначуваність; згинальний момент.

This paper proposes a new method for revealing the static uncertainty of multi-span beams on the basis of the universal equation of the elastic line of the beam. This method is free from graphical constructions and allows optimizing the derivation of additional deformation equations for "redundant" indeterminate, as the next equation differs from the previous one only by adding another item with a new load. The proposed procedure provides the optimal solution of almost any problem to reveal the static uncertainty of multi-span beams.

Keywords: beam; equation; span; method; static uncertainty; bending moment.

Постановка проблеми

Опорні конструкції машин і механізмів металургійного обладнання, яке характеризується великими габаритами, в розрахунковій схемі можна звести до багато прогінних балок. Загально відомо, що багатопрогінні балки є статично невизначуваними. Традиційно складалося, що розкриття їх статичної невизначуванності проводиться на підставі графоаналітичного методу, який має назву «Рівняння 3-х моментів» [1,2,3]. За цим методом рівняння трьох моментів розв'язуються шляхом побудови проміжних епюр згинальних моментів, знаходження їх площ та положення центрів ваги. Ці процедури приводять до необґрунтованого збільшення часу на рішення задачі. Доцільно мати аналітичний метод розкриття статичної невизначеності багатопрогінних балок, який би був вільний від графічних побудов і значно скорочував би час на розв'язання задачі.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

На сучасному етапі розрахунок складних просторових конструкцій проводиться за допомогою розрахунково-програмних комплексів «ЛИРА», «SCAD» та інших. Однак, це ніяким чином не обмежує необхідність застосовування в інженерній практиці простих аналітичних методів, до яких і відноситься пропонований нами метод розкриття статичної невизначуванності багатопрогінних балок.

Формулювання мети дослідження

На підставі методу, який пропонується, додаткові до статичних рівнянь, рівняння переміщень складаються за допомогою універсального рівняння зігнутої осі балки. При цьому число прогонів балки може бути будь-яким і значення «зайвих» реакцій зв'язків не залежать від згинальної жорсткості балки при будь-якому способі її закріплення.

Виклад основного матеріалу

Універсальне рівняння зігнутої осі балки має вигляд:

$$v(x) = v_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{M_0 \cdot x^2}{2! EI_z} + \frac{Q_0 \cdot x^3}{3! EI_z} + \sum_{i=1}^n \frac{M_i (x - a_i)^2}{2! EI_z} + \sum_{i=1}^n \frac{F_i (x - b_i)^3}{3! EI_z} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i (x - c_i)^4}{4! EI_z} - \sum_{i=1}^n \frac{q_i (x - d_i)^4}{4! EI_z}, \quad (1)$$

де x — координата перерізу балки, в якому визначають її прогин; початок осі x завжди розташовують в крайньому лівому перетині балки, додатний напрям осі y приймають зазвичай вгору, $v(x)$ — переміщення перерізу балки з координатою x в напрямі осі y ; EI_z — згинальна жорсткість балки відносно нейтральної осі z ; v_0, θ_0 — відповідно прогин і кут повороту перерізу балки на початку координат; M_0 і Q_0 — відповідно згинальний момент і поперечна сила в перерізі балки на початку координат; M_i — величина зовнішнього зосередженого моменту, прикладеного до балки на відстані a_i від початку координат; F_i — величина діючої на балку « i -тої» зосередженої сили, прикладеної до балки на відстані b_i від початку координат; q_i — інтенсивність прикладеного до балки « i -го» рівномірно розподіленого навантаження; c_i — відстань від початку координат до початку розподіленого навантаження q_i ; d_i — відстань до кінця розподіленого навантаження q_i .

Відмітимо наступне:

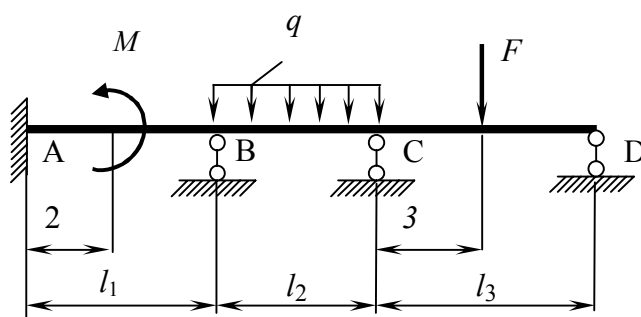
1. При визначенні переміщення будь-якого перерізу балки, враховується тільки зовнішнє навантаження (M, F, q), яке прикладене між початком координат і даними перерізом.
2. Зовнішнє навантаження, від якого у розглядуваному перерізі балка згинається так, що верхні волокна стискаються, а нижні — розтягаються, вважається додатним.

Можливі наступні способи закріплення лівого кінця балки на початку координат:

1. Жорстке защемлення, при цьому $v_0 = 0, \theta_0 = 0, M_0 \neq 0, Q_0 \neq 0$;
2. Шарнірне закріплення, при цьому $v_0 = 0, \theta_0 \neq 0, M_0 = 0, Q_0 \neq 0$.

Результати роботи. Розглянемо два приклади, з зазначеними граничними умовами, покажемо сам метод і обґрунтуємо, що реакції «зайвих» зв'язків не залежать від згинальної жорсткості балки.

Приклад 1. Потрібно розкрити статичну невизначуванність балки (рис. 1) при наступних даних:



$$M=10 \text{ кНм}, F=15 \text{ кН}, q=10 \text{ кН/м}, \\ l_1=5 \text{ м}, l_2=6 \text{ м}, l_3=7 \text{ м}$$

Рис. 1. Схема балки

Розрахункова схема представлена на рис. 2. При вертикальних зовнішніх навантаженнях з рівняння $\sum F_{ix} = 0$ статичи впливає, що $R_{Ax} = 0$. Для визначення 5 невідомих: $M_A, R_A = R_{Ay}, R_B, R_C, R_D$ необхідно скласти 5 рівнянь. Балка тричі статично невизначувана. З умов рівноваги $\sum F_{iy} = 0, \sum M_A(F_i) = 0$ впливає тільки два рівняння. Додаткові три рівняння переміщень складаємо за допомогою універсального рівняння зігнутої осі балки, які виражають умови, що прогини балки на опорах B, C і D дорівнюють нулю: $v_B = 0; v_C = 0; v_D = 0$.

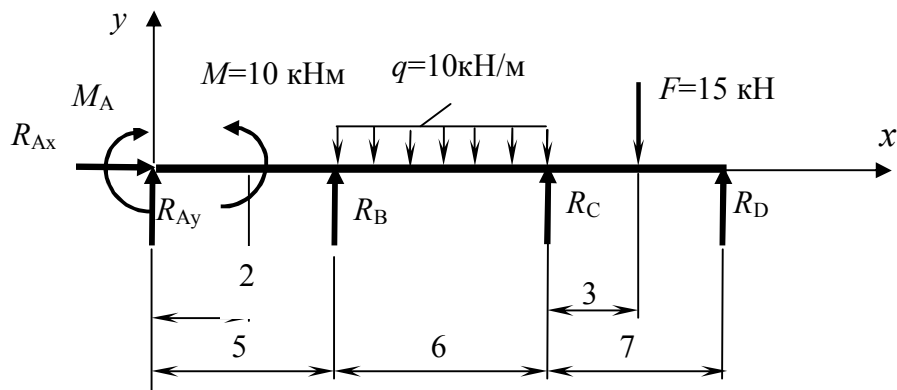


Рис. 2. Розрахункова схема балки

Складаємо ці рівняння і приводимо їх до канонічного виду:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \right\}$$

$$1) \sum F_{iy} = 0. \quad R_A + R_B + R_C + R_D - q \cdot 6 - F = 0.$$

Підставляємо значення навантажень і зводимо рівняння до канонічного виду:

$$0 \cdot M_A + 1 \cdot R_A + 1 \cdot R_B + 1 \cdot R_C + 1 \cdot R_D = 75. \quad (2)$$

$$2) \sum M_A(F_i) = 0. \quad -M_A + M + R_B \cdot 5 + R_C \cdot 9,6 + R_D \cdot 17 - q \cdot 6 \cdot 8 - F \cdot 14 = 0.$$

У канонічній формі це рівняння набуває вигляду:

$$-1 \cdot M_A + 0 \cdot R_A + 5 \cdot R_B + 11 \cdot R_C + 17 R_D = 690. \quad (3)$$

$$3) v_B = 0 \text{ при } x = 5 \text{ м} \quad v_0 + \theta_0 5 + \frac{M_0 5^2}{2! EI} + \frac{Q_0 5^3}{3! EI} - \frac{M(4-2)^2}{2! EI} = 0, \text{ або}$$

$$1 \cdot M_A + 1,33 \cdot R_A + 0 \cdot R_B + 0 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 1,25. \quad (4)$$

$$4) v_C = 0 \text{ при } x = 11 \text{ м}$$

$$v_0 + \theta_0 11 + \frac{M_0 11^2}{2! EI} + \frac{Q_0 11^3}{3! EI} - \frac{M(11-2)^2}{2! EI} + \frac{R_B(11-5)^3}{3! EI} - \frac{q(11-5)^4}{4! EI} = 0 \text{ або}$$

$$1 \cdot M_A + 3,2 \cdot R_A + 0,635 \cdot R_B + 0 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 10,248. \quad (5)$$

$$5) v_D = 0 \text{ при } x = 17 \text{ м}$$

$$v_0 + \theta_0 17 + \frac{M_0 17^2}{2! EI} + \frac{Q_0 17^3}{3! EI} - \frac{M(17-2)^2}{2! EI} + \frac{R_B(17-5)^3}{3! EI} + \frac{R_C(17-11)^3}{3! EI} - \frac{q(17-5)^4}{4! EI} + \frac{q(17-11)^4}{4! EI} - \frac{F(17-14)^3}{3! EI} = 0.$$

$$1 \cdot M_A + 4,53 \cdot R_A + 1,594 \cdot R_B + 0,115 \cdot R_C + 0 \cdot R_D = 33,502. \quad (6)$$

Систему п'яти лінійних алгебраїчних рівнянь (2—6) представимо в матричній формі

$$A \cdot R = B,$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 9,6 & 13,6 \\ 1 & 1,33 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3,2 & 0,635 & 0 & 0 \\ 1 & 4,53 & 1,594 & 0,115 & 0 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} M_A \\ R_A \\ R_B \\ R_C \\ R_D \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 56,8 \\ 438,84 \\ 1,25 \\ 10,248 \\ 33,502 \end{pmatrix}.$$

Згинальна жорсткість балки не входить в рівняння, які розв'язуються і, отже, реакції «зайвих» зв'язків від неї не залежать. Отримано $M_A = 7,42$ кНм, $R_A = -3,44$ кН, $R_B = 24,62$ кН, $R_C = 40,54$ кН, $R_D = 1,74$ кН.

Подальший розрахунок балки не несе ніяких труднощів.

Приклад 2. Розкрити статичну невизначуваність задачі (рис.3) при наступних даних: $l_1=7$ м, $l_2=6$ м, $l_3=7$ м, $M=6$ кНм, $F=20$ кН, $q_1=10$ кН/м, $q_2=15$ кН/м.

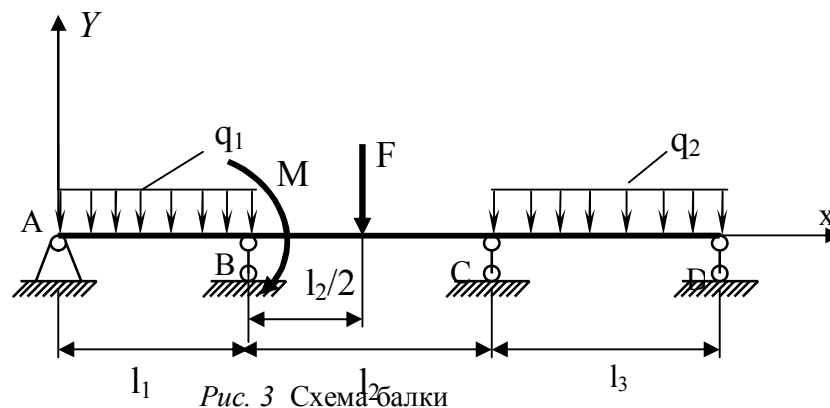


Рис. 3 Схема балки

Розрахункова схема показана на рис. 4.

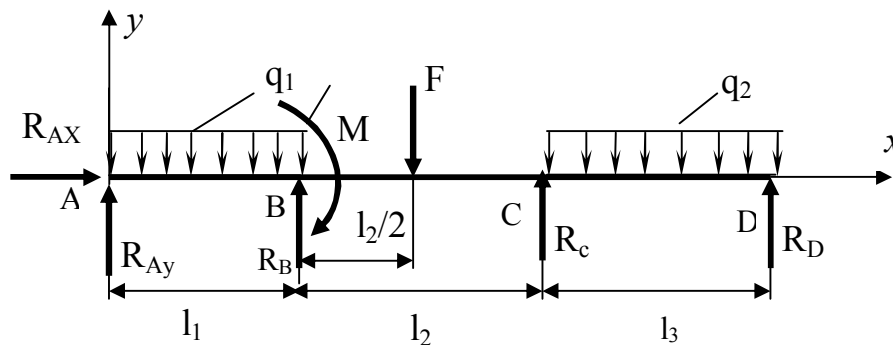


Рис. 4. Розрахункова схема балки

При вертикальних зовнішніх навантаженнях з рівняння статки $\sum F_{ix} = 0$ випливає, що $R_{Ax} \equiv 0$. Балка двічі статично невизначувана і для розкриття її статичної невизначуваності треба скласти два додаткових рівнянь переміщень. Але в цих рівняннях невідомою буде також кут повороту перерізу балки на початку координат θ_0 , тобто на шарнірній опорі A. Тому загальна кількість невідомих буде 5: R_A , R_B , R_C , R_D , θ_0 . Для їх визначення необхідно скласти 5 рівнянь. Можемо скласти тільки 2 рівняння статки для плоскої системи паралельних сил $\sum F_{iy} = 0$; $\sum M_A(F_i) = 0$ і три рівняння за допомогою універсального рівняння зігнутої осі балки, які виражають умови, що прогини балки на опорах B, C і D дорівнюють нулю: $v_B = 0$; $v_C = 0$; $v_D = 0$.

У рівняння (8)—(12) входить згинальна жорсткість балки EI , яку ми поки що не знаємо, добір поперечного перерізу балки є кінцевим пунктом послідовності розрахунку на міцність або жорсткість в подібній задачі. На даному етапі розрахунку ми повинні прийняти деяке значення $EI \neq 0$.

Оцінимо вплив значення згинальної жорсткості балки на розрахункові значення реакцій опор.

У таблиці прокатних профілів вказані номери двутаврів N10-N60с. Моменти інерції площі поперечного перерізу балок щодо центральної головної осі інерції: для двутавра N10 $I = 245 \text{ см}^4 = 245 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, для двутавра N60с $I = 91060 \text{ см}^4 = 91060 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. Модуль пружності сталі $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа (кН / м}^2\text{)}$.

Як випливає з наведеної таблиці, значення реакцій опор не залежать від величини згинальної жорсткості балки, тому на даному етапі розрахунку для всіх варіантів завдань можна рекомендувати приймати одне значення EI , наприклад, для двутавра N 30, в, таке, що дорівнює 18800 кНм^2 .

Таблиця 1. Значення реакцій опор балки при різних значеннях її згинальної жорсткості

$EI, \text{кНм}^2$	min 490	середнє 91270	max 182120	для N 30в 18800
θ_0	0,017	$9,311 \cdot 10^{-5}$	$4,667 \cdot 10^{-5}$	$4,521 \cdot 10^{-4}$
$R_A, \text{кН}$	0,564	0,565	0,564	0,564
$R_B, \text{кН}$	3,601	3,600	3,601	3,601
$R_C, \text{кН}$	24,955	24,957	24,955	24,955
$R_D, \text{кН}$	8,879	8,878	8,879	8,879

Для розв'язання системи 5 алгебраїчних рівнянь ми використали MathCAD. Отримано:

$$R = \begin{pmatrix} 4,521 \cdot 10^{-4} \\ 0,564 \\ 3,601 \\ 24,955 \\ 8,879 \end{pmatrix}, \text{ тобто } \theta_0 = 4,881 \cdot 10^{-4}, \quad R_A = 0,864 \text{ кН}, \quad R_B = 4,681 \text{ кН}, \quad R_C = 26,975 \text{ кН},$$

$$R_D = 9,999 \text{ кН}.$$

Пояснити незалежність значень реакцій опор балки від її згинальної жорсткості EI зручно за допомогою правила Крамера, відповідно до якого рішення системи алгебраїчних рівнянь (7) знаходиться у вигляді:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \text{ де } \Delta \text{ — визначник системи рівнянь (7),}$$

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \det \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

У наших позначеннях для системи 5-ти рівнянь (13) визначник має вигляд

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9,2 & 13,2 \\ 0,5EI & 1,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0,217EI & 3,067 & 0,554 & 0 & 0 \\ 0,152EI & 4,4 & 1,49 & 0,122 & 0 \end{vmatrix}, \text{ можемо зробити наступне перетворення: в силу}$$

властивостей визначників загальний множник, що міститься у всіх членах одного ряду, винесемо за знак визначника, тобто

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9,2 & 13,2 \\ 0,5EI & 1,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0,217EI & 3,067 & 0,554 & 0 & 0 \\ 0,152EI & 4,4 & 1,49 & 0,122 & 0 \end{vmatrix} = EI \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9,2 & 13,2 \\ 0,5 & 1,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0,217 & 3,067 & 0,554 & 0 & 0 \\ 0,152 & 4,4 & 1,49 & 0,122 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det \begin{vmatrix} 38 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 361,2 & 0 & 4 & 9,2 & 13,2 \\ 5 & 1,33 & 0 & 0 & 0 \\ 5,57 & 3,067 & 0,554 & 0 & 0 \\ 12,185 & 4,4 & 1,49 & 0,122 & 0 \end{vmatrix}, \quad \theta_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ залежить від величини } EI, \text{ але}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{vmatrix} 0 & 38 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 361,2 & 4 & 9,2 & 13,2 \\ 0,5EI & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,217EI & 5,57 & 0,554 & 0 & 0 \\ 0,152EI & 12,185 & 1,49 & 0,122 & 0 \end{vmatrix} = EI \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 38 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 361,2 & 4 & 9,2 & 13,2 \\ 0,5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,217 & 5,57 & 0,554 & 0 & 0 \\ 0,152 & 12,185 & 1,49 & 0,122 & 0 \end{vmatrix}$$

і $R_A = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ від не залежить, оскільки вона скорочується в чисельнику і знаменнику. Аналогічні перетворення можна зробити в $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$, тому значення реакцій опор B, C, D теж не залежать від EI .

Послідовність розрахунку балки на міцність повинна бути наступна.

1. У розрахунковій схемі всі зв'язки замінюємо невідомими реакціями зв'язків.
2. Складаємо рівняння статки.
3. Решту алгебраїчних рівнянь, (число рівнянь має дорівнювати числу невідомих реакцій зв'язків) складаємо за допомогою універсального рівняння зігнутої осі балки. Ці рівняння описують рівність нулю прогинів балки на опорах.
4. Систему отриманих алгебраїчних рівнянь розв'язуємо, задавши деяке значення згинальної жорсткості балки.
5. Подальший розрахунок балки проводиться звичайним методом.

Висновки

На підставі розглянутих прикладів можна зробити висновок, що найбільш оптимальним методом по розрахунку багатопрогінних балок є запропонований авторами метод, який вільний від графічних побудов і використовує дуже просте універсальне рівняння зігнутої осі балки. При цьому наступне додаткове рівняння переміщень відрізняється від попереднього тільки додаванням ще одного доданку з новим навантаженням. Такий підхід забезпечує оптимальне розв'язання практично любой задачі, по розкриттю статичної невизначуванності багатопрогінних балок.

Список використаної літератури

1. Опір матеріалів: підручник / Г.С. Писаренко, О.Д. Квітка, Е.С. Уманський. К.: Вища школа, 2004. 653 с.
2. Дарков А.В. Сопротивление материалов: учебник. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. М.: Высшая школа, 1989. 623 с.
3. Снитко Н.К. Строительная механика: учебник. / М.: Высшая школа, 1980. 432 с.

UNIVERSAL METHOD OF CALCULATION OF MULTISPAN BEAMS

Ropay V., Telipko L., Romanyuk O.

Abstract

The supporting structures of machines and mechanisms of metallurgical equipment, which are characterized by large dimensions, in the calculation scheme can be reduced to multispans beams, which are statically indeterminate. Traditionally, the disclosure of their static uncertainty is based on the graphoanalytical method, which is called "Equation of 3 moments". According to this method, the equations of three points are solved by constructing intermediate epure of bending moments, finding their areas and position of the centers of gravity. These procedures lead to an unreasonable increase in time to solve the problem. It is advisable to have an analytical method for detecting static uncertainty of multispans beams, which would be free from graphical constructions and would significantly reduce the time to solve the problem.

At the present stage, the calculation of complex spatial structures is carried out using the calculation and software systems "LIRA", "SCAD" and others. However, this in no way limits the need for the application in engineering practice of simple analytical methods, which include a universal method for detecting static indeterminateness of multispans beams.

Additional, to the static equations, the equations of displacement are compiled using the universal equation of the bent axis of the beam, and the number of beams can be any large. Different variants of boundary conditions are considered. The results of the considered examples prove the independence of the values of "extra" unknown from the stiffness of the beam.

The universal method is quite optimal, as it uses a very simple universal equation of the bent axis of the beam and, with each subsequent additional equation of displacement differs from the previous one only by adding another item with a new load. This approach provides the optimal solution to almost any problem, by revealing the static indeterminateness of multispans beams.

Referenses

- [1] Opir materialiv: pidruchny`k / G.S. Py`sarenko, O.D. Kvitka, E.S. Umans`ky`j. K.: Vy`shha shkola, 2004. 653 p.
- [2] Darkov A.V. Soprotyv`vleny`e matery`alov: uchebny`k. / A.V. Darkov, G.S. Shpy`ro. M.: Vy`sshaya shkola, 1989. 623 p.
- [3] Sny`tko N.K. Stroy`tel`naya mexany`ka: uchebny`k. / M.: Vy`sshaya shkola, 1980. 432 p.