КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 530.12 DOI 10.31319/2519-2884.37.2020.14

САМОХВАЛОВ С.Є., д.т.н., професор

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

ЗАКОНИ РУХУ В РЕПЕРНИХ ТЕОРІЯХ ГРАВІТАЦІЇ

Вступ. Однією з найбільш вражаючих властивостей загальної теорії відносності (ЗТВ) є той факт, що матерія, котра породжує гравітаційне поле, не може рухатись довільно, а повинна підпорядковуватись певним рівнянням, які слідують з рівнянь гравітаційного поля як умови їх сумісності. Цей факт вперше був відмічений вже в основоположній роботі Д. Гілберта [1], в якій рівняння ЗТВ, як варіаційні рівняння Лагранжа, вперше побачили світ. Гілберт показав, що у випадку, коли джерелом гравітаційного поля є електромагнітне поле, чотири лінійні комбінації рівнянь електромагнітного поля і їх похідних при виконанні рівнянь гравітаційного поля дорівнюють нулю. Що стосується "твердої матерії", то з рівнянь гравітаційного поля для їх сумісності необхідно, щоб порошинки пилової матерії рухалися по геодезичним ріманового простору, який описує дане гравітаційне поле, на що було вказано в роботі А. Ейнштейна і Я. Громмера [2] і що, на думку В.А. Фока [3], є одним з головних обґрунтувань ЗТВ.

Цікавість до проблеми руху поновилася в наш час у зв'язку з реєстрацією гравітаційних хвиль і аналізом умов їх випромінювання [4]. Крім того, стали популярними в наш час теорії гравітації з вищими похідними польових змінних в лагранжіані гравітаційного поля (наприклад f(R)-теорії) [5]. Дослідити закони руху в таких теоріях дозволяє теоретико-груповий метод, розроблений в роботі [6].

Постановка задачі. Проаналізувати закони руху в реперних теоріях гравітації з вищими похідними від польових змінних.

Дана робота є продовженням роботи [6]. Посилання на формули з цієї роботи даються у вигляді (I. …) (перед номером формули з [6] стоїть символ I.).

Результати роботи. Під теоріями гравітації ми розумітимемо калібрувальні теорії групи трансляцій, яка є групою ріманових трансляцій T_M^g [7]. В цьому випадку потенціалами гравітаційного поля є компоненти реперних полів h_μ^m (індекси m, n, p, s), а напруженість гравітаційного поля визначається коефіцієнтами їх неголономності $F_{\mu\nu}^m := \partial_\nu h_\mu^m - \partial_\mu h_\nu^m$.

Вважаємо, що крім гравітаційного поля в просторі-часі M присутні ще поля матерії ψ^ξ (це всі поля, за винятком гравітаційного). Індекс поля – ξ.

Всі матеріальні поля задані в локальному репері, а тому є T_M^g - скалярами.

Лагранжіан гравітуючої системи визначається як сума

$$L = \sqrt{g} L_G(h, \partial h, ..., \partial^{(n)} h) + \sqrt{g} L_\psi(h, \partial h, \psi, \partial\psi),$$

де $g = \left| g_{\mu\nu} \right|$, $g_{\mu\nu} = h_\mu^m h_\nu^n \eta_{mn}$. В нашому випадку польові змінні q^I розпадаються в систему $\{h_\mu^m, \psi^\xi\}$, що еквівалентно розбиттю польового індексу I в мультиіндекс

$\{{}^{m}_{\mu},{}^{\xi}\}$. При мінімальному способі включення гравітаційної взаємодії L_ψ від ∂h не залежить.

В даній роботі не будемо конкретизувати ні лагранжіан гравітаційного поля $\sqrt{g}L_G$, ні лагранжіан гравітуючої матерії $\sqrt{g}L_\psi$, припускаючи тільки калібрувальну трансляційну інваріантність (T_M^g-інваріантність) як L_G, так і L_ψ, що забезпечує рівність нулю інтегральних варіацій обох складових лагранжіану L при T_M^g-перетвореннях $\delta'(\sqrt{g}L_G)=0$, $\delta'(\sqrt{g}L_\psi)=0$.

Інфінітезимальні перетворення координат і польових змінних при дії групи T_M^g виглядають наступним чином:

$$\delta x^\mu = h_n^\mu t^n\,, \quad \delta h_\mu^m = -F_{\mu n}^m t^n - \partial_\mu t^m\,, \quad \delta\psi^\xi = -\partial_n \psi^\xi t^n\,.$$

Таким чином, в нашому випадку коефіцієнти формули (І.28) такі:

$$a_{\mu n}^m = -F_{\mu n}^m\,, \qquad a^\xi{}_n = -\partial_n\psi^\xi\,, \qquad b_{\mu n}^{m\nu} = -\delta_n^m\delta_\mu^\nu\,, \tag{1}$$

а всі інші коефіцієнти $b^I{}_m^\mu = 0$. Тут $\partial_n := h_n^\mu\partial_\mu$.

Введемо позначення для варіаційних похідних. Хай $[\sqrt{g}L_G]_m^\mu =: \sqrt{g}G_m^\mu$, де G_m^μ – узагальнений тензор Ейнштейна, який підраховується за формулою (І.3) з $q^I \to h_\mu^m$:

$$\sqrt{g}G_m^\mu = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\partial^{(k)}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}\partial_m^{\mu,\sigma_1\ldots\sigma_k}(\sqrt{g}L_G) =$$
$$\partial_m^\mu(\sqrt{g}L_G) - \partial_\sigma(\sqrt{g}\partial_m^{\mu,\sigma}L_G) + \partial^{(2)}_{\sigma\rho}(\sqrt{g}\partial_m^{\mu,\sigma\rho}L_G) - \ldots$$

Тут прийнято, що при $q^I = h_\mu^m$, $\partial_I = \partial_m^\mu$, $\partial_I^{\nu_1\ldots\nu_l} = \partial_m^{\mu,\nu_1\ldots\nu_l}$, $[L]_I = [L]_m^\mu$, $[L]_I^{\nu_1\ldots\nu_l} = [L]_m^{\mu,\nu_1\ldots\nu_l}$. Крім того, $[\sqrt{g}L_\psi]_\xi =: \sqrt{g}G_\xi$, де

$$G_\xi = f_\xi - \nabla_\sigma p_\xi^\sigma\,, \qquad f_\xi := \partial_\xi L_\psi\,, \quad p_\xi^\sigma := \partial_\xi^\sigma L_\psi\,,$$

а ∇_σ – коваріантна похідна в рімановому просторі з метрикою $g_{\mu\nu}$: $\nabla_\sigma p_\xi^\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\sigma(\sqrt{g}\,p_\xi^\sigma)$.

Далі введемо позначення $[\sqrt{g}L_\psi]_m^\mu =: -\sqrt{g}\tau_m^\mu$, отже

$$\tau_m^\mu = \sigma_m^\mu + \nabla_\sigma\beta_m^{\mu\sigma}\,, \quad \sqrt{g}\sigma_m^\mu := -\partial_m^\mu(\sqrt{g}L_\psi)\,, \quad \beta_m^{\mu\sigma} := \partial_m^{\mu,\sigma}L_\psi\,, \tag{2}$$

де $\nabla_\sigma\beta_m^{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\sigma(\sqrt{g}\beta_m^{\mu\sigma})$. Це витікає з того факту, що тензорна густина $S_{\psi}{}_n^{\nu\sigma} = \sqrt{g}\beta_n^{\nu\sigma}$ є трансляційним суперпотенціалом лагранжіану $\sqrt{g}L_\psi$ і тому є антисиметричною за верхніми індексами величиною внаслідок T_M^g-інваріантності L_ψ.

Нижче показано, що змішаний координатно-реперний тензор τ_m^μ можне тлумачитися, як тензор енергії-імпульсу матерії. Отже, в прийнятих позначеннях $[L]_m^\mu = \sqrt{g}(G_m^\mu - \tau_m^\mu)$ і рівняння гравітаційного поля $[L]_m^\mu = 0$ в будь-якій реперній теорії гравітації (де h_μ^m є гравітаційними потенціалами) може бути записаним в формі рівняння Ейнштейна $G_m^\mu = \tau_m^\mu$.

Зі складовими $\sqrt{g}L_G$ і $\sqrt{g}L_\psi$ лагранжіану L пов'язані відповідні складові струму і суперпотенціалу:

$$J_m^\mu = J_{G\,m}^{\;\;\mu} + J_{\psi m}^{\;\;\mu}, \quad S_m^{\mu\nu} = S_{Gm}^{\;\;\mu\nu} + S_{\psi m}^{\;\;\mu\nu}.$$

Для знаходження складових, пов'язаних з гравітаційним лагранжіаном, конкретизуємо для $L = \sqrt{g}L_G$ вирази (I.9), (I.30), (I.31), враховуючи формули (1):

$$J_{Gn}^{\;\;\sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} [\sqrt{g}L_G]_m^{\lambda,\nu_1\ldots\nu_k\sigma} \partial_{\nu_1\ldots\nu_k}^{(k)} F_{\;\lambda n}^{m} - \sqrt{g}L_G h_n^\sigma$$

$$J_{Gn}^{\;\;\mu\sigma} = [\sqrt{g}L_G]_n^{\mu,\sigma} + \sum_{k=1}^{n-1} k\,[\sqrt{g}L_G]_m^{\lambda,\mu\nu_2\ldots\nu_k\sigma} \partial_{\nu_2\ldots\nu_k}^{(k-1)} F_{\;\lambda n}^{m}$$

$$J_{Gn}^{\;\;\mu\rho\sigma} = [\sqrt{g}L_G]_n^{\{\mu,\rho\}\sigma} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} [\sqrt{g}L_G]_m^{\lambda,\mu\rho\nu_3\ldots\nu_k\sigma} \partial_{\nu_3\ldots\nu_k}^{(k-2)} F_{\;\lambda n}^{m}.$$

В більшості практично цікавих теорій n=2, і ці формули мають вигляд:

$$J_{Gn}^{\;\;\sigma} = [\sqrt{g}L_G]_m^{\lambda,\sigma} F_{\;\lambda n}^{m} + [\sqrt{g}L_G]_m^{\lambda,\nu\sigma} \partial_\nu F_{\;\lambda n}^{m} - \sqrt{g}L_G h_n^\sigma,$$

$$J_{Gn}^{\;\;\mu\sigma} = [\sqrt{g}L_G]_n^{\mu,\sigma} + [\sqrt{g}L_G]_m^{\lambda,\mu\sigma} F_{\;\lambda n}^{m}, \quad J_{Gn}^{\;\;\mu\rho\sigma} = \sqrt{g}\,\partial_n^{\{\mu,\rho\}\sigma} L_G.$$

Для n=1 маємо:

$$J_{Gn}^{\;\;\sigma} = \sqrt{g}(\partial_m^{\mu,\sigma} L_G F_{\;\lambda n}^{m} - L_G h_n^\sigma), \quad J_{Gn}^{\;\;\mu\sigma} = \sqrt{g}\partial_n^{\mu,\sigma} L_G, \quad J_{Gn}^{\;\;\mu\rho\sigma} = 0.$$

Введемо позначення:

$$\sqrt{g}t_m^\mu := J_{Gm}^{\;\;\mu}, \qquad \sqrt{g}B_{\;m}^{\mu\sigma} := S_{Gm}^{\;\;\mu\sigma} = J_{Gm}^{\;\;\mu\sigma} + \partial_\sigma J_{Ga}^{\;\;\mu\nu\sigma}.$$

Як ньотерівські струми J_m^μ так і відповідні суперпотенціали $S_m^{\mu\sigma}$ з точки зору координатних перетворень (T_M^g-перетворень) є тензорними густинами, які при діленні на $\sqrt{g}$ стають тензорами (відповідного рангу), які ми будемо називати тензорними ньотерівським струмом та тензорним суперпотенціалом відповідно. По реперному індексу по відношенню до глобальних перетворень Лоренца вони є векторами, а по сукупності як трансляційних T_M^g-перетворень, так і глобальних Лоренцевих перетворень – змішаними тензорами. Отже тензорний ньотерівський струм t_m^μ, пов'язаний з калібрувальною трансляційною інваріантністю лагранжіана гравітаційного поля L_G, є (змішаним) *тензором енергії-імпульсу гравітаційного поля* в теорії гравітації, що описується лагранжіаном L_G, а $B_m^{\mu\sigma}$ – відповідним тензорним суперпотенціалом, який ми будемо називати *тензором індукції гравітаційного поля*.

Для лагранжіану $\sqrt{g}L_\psi$ трансляційний струм та суперпотенціал знаходяться за формулами:

$$J_{\psi n}^{\ \nu} = \sqrt{g}(\beta_m^{\mu\nu} F_{\ \mu n}^{m} + p_\xi^\nu \partial_n \psi^\xi - L_\psi h_n^\nu), \quad S_{\psi n}^{\ \nu\sigma} = \sqrt{g}\beta_n^{\nu\sigma},$$

що конкретизують для нашого випадку формули (I.38) і (I.39) відповідно.

Розглянемо тотожність (I.33) для обох складових лагранжіану L. Для $\sqrt{g}L_G$ маємо:

$$-G_m^\mu = t_{\ m}^{\mu} + \nabla_\sigma B_{\ m}^{\mu\sigma}, \tag{3}$$

а для $\sqrt{g}L_\psi$: $\tau_n^\nu = J_{\psi n}^{\ \nu}/\sqrt{g} + \nabla_\sigma \beta_n^{\nu\sigma}$. Порівняння останньої тотожності з виразом (2) дає зручний спосіб підрахунку трансляційного ньотерівського струму лагранжіана матерії: $J_{\psi n}^{\ \nu} = \sqrt{g}\,\sigma_n^\nu = -\partial_n^\nu(\sqrt{g}L_\psi)$. Отже змішаний координатно-реперний тензор σ_n^ν є тензором енергії-імпульсу матеріальних полів. Тензор τ_n^ν відрізняється від σ_n^ν на коваріантну дивергенцію антисиметричного тензора $\beta_n^{\nu\sigma}$, отже також може тлумачитися як тензор енергії-імпульсу матерії. При мінімальному способі включення гравітаційної взаємодії $\beta_n^{\nu\sigma} = 0$, отже обидва тензори τ_n^ν і σ_n^ν співпадають.

З тотожності (3) виходить:

$$-[L]_m^\mu / \sqrt{g} = -(G_m^\mu - \tau_m^\mu) = T_{\ m}^{\mu} + \nabla_\sigma B_{\ m}^{\mu\sigma},$$

де $T_{\ m}^{\mu} := t_m^\mu + \tau_m^\mu$ – сумарний тензор енергії-імпульсу гравітуючої системи. Одержана тотожність дає змогу рівняння гравітаційного поля $[L]_m^\mu = 0$ записати в суперпотенціальній формі:

$$\nabla_\sigma B_{\ m}^{\mu\sigma} = -T_{\ m}^{\mu},$$

аналогічній формі динамічних рівнянь Максвелла, та й рівнянь інших калібрувальних полів внутрішньої симетрії. Як бачимо, ця можливість забезпечується виключно калібрувальною трансляційною інваріантністю теорії гравітації, а не конкретним видом гравітаційного лагранжіану. Таким чином, доведено наступне.

Теорема. *Рівняння гравітаційного поля* $[L]_m^\mu = 0$ *в будь якій* T_M^g*- інваріантній теорії гравітації може бути записане як в формі рівняння Ейнштейна* $G_m^\mu = \tau_m^\mu$*, так і в суперпотенціальній формі* $\nabla_\sigma B_{\ m}^{\mu\sigma} = -T_{\ m}^{\mu}$*, що є вираженням повного змішаного координатно-реперного тензора енергії-імпульсу гравітуючої системи* $T_{\ m}^{\mu}$ *через коваріантну дивергенцію тензора індукції гравітаційного поля* $B_{\ m}^{\mu\sigma}$*, який є його тензорним суперпотенціалом.*

Тензор індукції гравітаційного поля $B_m^{\mu\sigma}$ визначається гравітаційним лагранжіаном $\sqrt{g}L_G$ і виступає в якості силової характеристики гравітаційного поля в теорії гравітації, основаній на $\sqrt{g}L_G$.

Перейдемо до розгляду тотожності (I.32). Для $\sqrt{g}L_G$ вона зводиться до

$$-G_m^{\mu} F_{\mu n}^{m} = \nabla_{\sigma} t_n^{\sigma}, \tag{4}$$

або з врахуванням тотожності (3) до

$$(t_m^{\mu} + \nabla_{\sigma} B_m^{\mu\sigma}) F_{\mu n}^{m} = \nabla_{\sigma} t_n^{\sigma}, \tag{5}$$

а для $\sqrt{g}L_{\psi}$ до

$$\tau_m^{\mu} F_{\mu n}^{m} - G_{\xi} \partial_n \psi^{\xi} = \nabla_{\sigma} \tau_n^{\sigma}. \tag{6}$$

Додаючи (5) і (6) одержуємо:

$$(T_m^{\mu} + \nabla_{\sigma} B_m^{\mu\sigma}) F_{\mu n}^{m} - G_{\xi} \partial_n \psi^{\xi} = \nabla_{\sigma} T_n^{\sigma}, \tag{7}$$

Розглянуті вище тотожності – сильні. Розглянемо тепер їх слабий (послаблений) варіант.

З рівняння гравітаційного поля $\nabla_{\sigma} B_m^{\mu\sigma} = -T_m^{\mu}$, внаслідок антисиметричності тензора індукції гравітаційного поля $B_m^{\mu\sigma}$, витікає закон збереження повної енергії-імпульсу гравітуючої системи:

$$-\nabla_{\mu} \nabla_{\sigma} B_m^{\mu\sigma} = \nabla_{\mu} T_m^{\mu} = \nabla_{\mu} t_m^{\mu} + \nabla_{\mu} \tau_m^{\mu} = 0. \tag{8}$$

На грав екстремалі $G_m^{\mu} = \tau_m^{\mu}$, а також $\nabla_{\mu} t_m^{\mu} = -\nabla_{\mu} \tau_m^{\mu}$, отже з тотожності (4) одержуємо тотожність (слабу)

$$\nabla_{\sigma} \tau_n^{\sigma} = \tau_m^{\mu} F_{\mu n}^{m} \tag{9}$$

- *рівняння переносу енергії-імпульсу матерії*, або *закон руху матерії*. Отже закон руху матерії (9) є тотожністю, котра внаслідок калібрувальної трансляційної інваріантності слідує з рівнянь гравітаційного поля.

Розглянемо закон руху матерії (9) у випадку порохоподібної матерії, коли її тензор енергії-імпульсу записується у вигляді: $\tau_m^{\mu} = \pi^{\mu} u_m$, де $u_m = dx_m / ds$ – 4-вимірна швидкість порошинок, а $\pi^{\mu} = \mu c u^{\mu}$ – густина їх 4-імпульсу (μ – густина власної маси). Підставляючи цей вираз в (9) одержуємо:

$$\pi^{\mu} \partial_{\mu} u_m = \pi^{\mu} u_n F_{\mu m}^{n} - \nabla_{\mu} \pi^{\mu} u_m. \tag{10}$$

При збереженні власної маси матерії $\nabla_{\mu} \pi^{\mu} = 0$ останній доданок в (10), котрий має смисл густини реактивної сили, зникає. Отже порошинки в цьому випадку рухаються за законом $u^{\mu}(\partial_{\mu} u_m - u_n F_{\mu m}^{n}) = 0$, який є записаним в термінах 4-швидкості

u_m і об'єкта неголономності $F^n_{\mu\nu}$ рівнянням геодезичної ріманового простору з метрикою $g_{\mu\nu}$: $du_\sigma / ds - \frac{1}{2}\partial_\sigma g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0$.

Таким чином, справедливо наступне.

Твердження 1. *В будь-якій T^g_M - симетричній теорії гравітації порошинки, при умові збереження їх власної маси (при відсутності реактивних сил), внаслідок рівнянь гравітаційного поля рухаються по геодезичним ріманового простору з метрикою $g_{\mu\nu} = \eta_{mn} h^m_\mu h^n_\nu$.*

На гравітаційній екстремалі тотожність (7) зводиться до рівняння $G_\xi \partial_n \psi^\xi = 0$. Скрізь, де виконується умова $rank(\partial_n \psi^\xi) = f$, де f – розмірність польового зображення ($\xi = 1,...f$), з даного рівняння слідує $G_\xi = 0$, або $\nabla_\sigma p^\sigma_\xi = f_\xi$, тобто при виконанні цієї умови рівняння поля гравітуючої матерії слідують з рівнянь гравітаційного поля. Вищеозначена умова може виконуватись лише у випадку $f \le 4$, зокрема для скалярних полів.

З іншого боку, при виконанні рівнянь $G_\xi = 0$ (на екстремалі поля матерії) і без припущення виконання рівнянь гравітаційного поля, тотожність (6) також дає закон руху матерії (9), а з тотожності (7) виходить, що при додатковому припущенні виконання закону збереження повної енергії-імпульсу (8) виконуються рівняння:

$$(\nabla_\nu B^{\mu\nu}_n + T^\mu_n) F^n_{\mu m} = 0.$$

Цих рівнянь всього 4, і тому з них, очевидно, не слідують всі рівняння гравітаційного поля $\nabla_\nu B^{\mu\nu}_n + T^\mu_n = 0$, а тільки певна їх частина. Це є узагальненням класичного результату Гілберта на випадок наявності матерії τ^μ_m.

Отже справедливо наступне.

Твердження 2. *В будь-якій T^g_M - симетричній теорії гравітації:*

1) при виконанні рівнянь гравітаційного поля $\nabla_\sigma B^{\mu\sigma}_m = -T^\mu_m$ (на гравітаційній екстремалі):

а) виконується закон руху матерії $\nabla_\sigma \tau^\sigma_n = \tau^\mu_m F^m_{\mu n}$;

б) виконується рівняння $G_\xi \partial_n \psi^\xi = 0$, яке скрізь, де виконується умова $rank(\partial_n \psi^\xi) = f$, еквівалентне рівнянню поля матерії $G_\xi = 0$;

2) при виконанні рівнянь поля матерії $G_\xi = 0$ (на екстремалі поля матерії):

а) виконується закон руху матерії $\nabla_\sigma \tau^\sigma_n = \tau^\mu_m F^m_{\mu n}$;

б) при додатковому припущенні збереження повної енергії-імпульсу $\nabla_\mu T^\mu_m = 0$ виконується рівняння $(\nabla_\nu B^{\mu\nu}_n + T^\mu_n) F^n_{\mu m} = 0$, яке еквівалентне частині рівнянь гравітаційного поля.

Як бачимо, цей результат не залежить від конкретного виразу для лагранжіанів і є наслідком лише калібрувальної трансляційної інваріантності теорії гравітації.

Висновки. Закон руху в реперних теоріях гравітації є наслідком калібрувальної трансляційної інваріантності і не залежить від конкретного виду лагранжіану, що забезпечує у всіх таких теоріях рух по геодезичним частинок пилової матерії внаслідок рівнянь гравітаційного поля.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гілберт Д. Основания физики. В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Москва: Мир, 1979. С. 133-145.
2. Эйнштейн А. Общая теория относительности и закон движения (Совместно с Я.Громмером). Собрание научных трудов. Т. II. Москва: Наука, 1966. С. 198-210.
3. Фок В.А. О движении конечных масс в общей теории относительности. В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Москва: Мир, 1979. С. 232-284.
4. Oltean M., Epp R., Sopuerta C., Spallicci A. and Mann R. Motion of localized sources in general relativity: gravitational self-force from quasilocal conservation laws. *Phis. Rev., 2020.* D101. 064060. arXiv:1907.03012 [gr-qc].
5. Pintoa P., Del Vecchiob L., Fatibeneb L. and Ferraris M. Extended cosmology in Palatini f(R)-theories. *J. Cosmology and Astroparticle Physics,* 2018. 044. arXiv:1807.00397 [gr-qc].
6. Самохвалов С.Є., Грищенко А.А. Квазілокальність калібрувальних зарядів. *Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету*, Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2020. Вип. 1(36). С. 113-117.
7. Самохвалов С.Е., Балакирева Е.Б. Теоретико-групповое согласование принципов длины и равенства в геометрии. *Изв. вузов. Математика*, 2015. №9. С. 31-45.

Надійшла до редколегії 22.09.2020.