11. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: підручник. Суми: Довкілля, 2010. 594с.
12. Карімов І.К., Карімов Г.І. Моделювання та прогнозування в системі підготовки студентів економічних спеціальностей. *Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету: (технічні науки)*. Кам'янське: ДДТУ, 2017. Випуск 2(31). С.149-153.

Надійшла до редколегії 09.12.2019.

УДК 004.94:519.677 DOI 10.31319/2519-2884.36.2020.29

КАРІМОВ І.К., к.ф.-м.н., доцент
КАРІМОВ Г.І., к.е.н., доцент
НУЖНА С.А.*, к.е.н., доцент
ПОДОДНЯ А.П., студент

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське
*Дніпровський державний аграрно-економічний університет, м. Дніпро

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОДНОВИМІРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Вступ. В усіх галузях науки і техніки при розробці нових конструкцій або технологій постає задача вибору найкращого з можливих варіантів. Математичним формулюванням та розв'язанням таких задач займається теорія оптимізації. Випадок, коли цільова функція залежить тільки від одного параметру (одновимірна оптимізація), досить часто зустрічається на практиці; крім того, до нього зводяться значно складніші задачі багатовимірної оптимізації [1, 2]. Отже, проблема пошуку нових підходів до розв'язання задач одновимірної оптимізації залишається актуальною.

Постановка задачі. При розв'язанні задач оптимізації широко застосовуються чисельні методи, реалізація яких пов'язана зі значним обсягом обчислень, що в свою чергу призводить до необхідності застосування комп'ютерної техніки і програмування відповідних алгоритмів. Сучасні інформаційні технології на основі загальнодоступних програмних пакетів *MS Excel* та *MathCad* дають можливість розв'язання подібних задач без програмування в традиційному його розумінні [3-5]. В той же час такий підхід не забезпечує наочності розв'язку, що може бути корисним при подальшому аналізі. Мета дослідження – вивчення особливостей використання табличного процесора MS Excel для покрокової реалізації чисельних методів одновимірної оптимізації, розробка та апробація відповідних алгоритмів.

Результати роботи. Розглянемо деякі методи одновимірної оптимізації на прикладі пошуку мінімуму функції $F(x)$. Будемо вважати, що функція $F(x)$ унімодальна, тобто має тільки один екстремум на інтервалі, що досліджується. Якщо це не так, то перш ніж шукати наближені значення екстремумів, необхідно їх локалізувати – виділити такі інтервали, всередині яких міститься тільки один екстремум. Оскільки точне значення екстремуму при цьому невідоме, то інтервал, в якому він міститься, будемо називати *інтервалом невизначеності*.

Отже, задача оптимізації на даному етапі формулюється так: на інтервалі невизначеності $[a;b]$ необхідно відшукати таке значення x^*, яке відповідає мінімуму функції $F(x)$.

Загальний принцип більшості методів полягає в послідовному звуженні границь інтервалу невизначеності, тобто, по заданому інтервалу $[a_k;b_k]$, в якому знаходиться

x^*, визначається новий інтервал $[a_{k+1};b_{k+1}]$, для якого справедливі оцінки

$$a_k \le a_{k+1} \le x^* \le b_{k+1} \le b_k .$$

Від кроку до кроку інтервал стає все вужчим, поки його довжина не стане меншою від наперед заданого числа ε – точності визначення мінімуму. Будь-яка точка останнього інтервалу може бути прийнята за значення x^* з похибкою, не більшою від ε. В кожному конкретному випадку наведена умова припинення обчислень може бути уточнена.

В залежності від стратегії визначення нових границь інтервалу невизначеності розрізняють ряд методів пошуку мінімуму. Одним з найпростіших є *метод дихотомії*. Відповідно до цього методу на k-му кроці обчислюються два проміжних значення $x_{1,k}$ і $x_{2,k}$ на відстані $\varepsilon / 2$ праворуч і ліворуч від середини інтервалу невизначеності

$$x_{1,k} = \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad x_{2,k} = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

де a_k, b_k – границі інтервалу невизначеності на k-му кроці, ε – наперед задана точність визначення x^*.

Після обчислення $F(x_{1,k})$ і $F(x_{2,k})$ та їх порівняння визначається новий інтервал невизначеності:

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k & , \quad F(x_{1,k}) < F(x_{2,k}) \\ x_{1,k} & , \quad F(x_{1,k}) \ge F(x_{2,k}) \end{cases}; \quad b_{k+1} = \begin{cases} x_{2,k} & , \quad F(x_{1,k}) \le F(x_{2,k}) \\ b_k & , \quad F(x_{1,k}) > F(x_{2,k}) \end{cases}. \tag{2}$$

На наступному (k+1)-му кроці знову обчислюються проміжні значення $x_{1,k+1}$ і $x_{2,k+1}$ за формулами (1) та нові границі інтервалу невизначеності a_{k+2}, b_{k+2} за формулами (2) і т.д. Пошук завершується на n-му кроці при виконанні умови

$$|b_n - a_n| < 2\varepsilon . \tag{3}$$

Точкою мінімуму буде та з точок $x_{1,n}$ або $x_{2,n}$, значення функції $F(x)$ в якій менше. Похибка визначення мінімуму при цьому не перевищує ε.

Як видно, алгоритм розв’язання задачі є типовим алгоритмом циклічної структури, в якому багаторазово повторюються обчислення за формулами (1)-(2). Цикл завершується при виконанні умови (3). Кількість кроків наперед невідома, отже, мова йде про ітераційний цикл.

Алгоритми циклічної структури можуть бути реалізовані в середовищі табличного процесора MS Excel, причому не тільки засобами мови VBA (Visual Basic for Application), а й в режимі маніпулювання даними, без безпосереднього програмування. В останньому випадку необхідно просто внести відомі дані в комірки електронної таблиці, записати формули, що реалізують один крок обчислень, та організувати копіювання формул необхідну кількість разів.

Фрагмент електронної таблиці, побудованої за описаним принципом для розв’язання задачі пошуку мінімуму функції $F(x) = x^{\sin x} + \cos x^2$ на інтервалі $[1;2]$, наведено на рис.1.

Комірки A2, A4:H4 містять пояснюючий текст, розшифровка якого не потрібна, оскільки збережені позначення, використані в описі алгоритму. В комірку B2 введене значення наперед заданої точності визначення x^*. Починаючи з рядка 5, стовпчики таблиці містять наступну інформацію: A – номер кроку алгоритму; B і C – ліва і права гра-

Оптимізація

$\varepsilon =$ 0,001

k	a_k	b_k	x_{1k}	x_{2k}	$F(x_{1k})$	$F(x_{2k})$	$b_k - a_k$
0	1,0000	2,0000	1,4995	1,5005	0,870951	0,869657	0,50000
1	1,4995	2,0000	1,7493	1,7503	0,737122	0,737645	0,25025
2	1,4995	1,7503	1,6244	1,6254	0,747104	0,746497	0,12538
3	1,6244	1,7503	1,6868	1,6878	0,724458	0,724366	0,06294
4	1,6868	1,7503	1,7180	1,7190	0,725990	0,726193	0,03172
5	1,6868	1,7190	1,7024	1,7034	0,724069	0,724122	0,01611
6	1,6868	1,7034	1,6946	1,6956	0,723981	0,723960	0,00830
7	1,6946	1,7034	1,6985	1,6995	0,723954	0,723970	0,00440
8	1,6946	1,6995	1,6966	1,6976	0,723949	0,723947	0,00245
9	1,6966	1,6995	1,6975	1,6985	0,723947	0,723954	0,00148
10	1,6966	1,6985	1,6971	1,6981	0,723947	0,723949	0,00099

Рисунок 1 – Фрагмент таблиці з розв'язком задачі (метод дихотомії)

ниці інтервалу невизначеності на відповідному кроці; D, E – проміжні точки $x_{1,k}$ і $x_{2,k}$ на k-му кроці; F, G – значення функції в проміжних точках; H – половина довжини інтервалу невизначеності на відповідному кроці. При цьому номер нульового кроку (комірка A5) і відомі з умови границі інтервалу невизначеності на цьому кроці (комірки B5, C5) введені як постійні числа. В інші комірки введені формули відповідно до табл.1. Видно, що формули в комірках D5, E5 реалізують формули (1) алгоритму; а формули в комірках B6, C6 – формули (2). Формули в комірках F5, G5 забезпечують обчислення значень функції, для якої визначається мінімум, в проміжних точках $x_{1,k}$ і $x_{2,k}$. Перехід до наступного кроку алгоритму задається в комірці A6.

Формули діапазону комірок D5:H5 копіюються в діапазон D6:H6. Далі виділяється діапазон A6:H6 і відповідні формули копіюються на діапазони A7:H7, A8:H8 і т.д. простим перетягуванням маркера заповнення комірок [5]. Паралельно проводиться візуальний контроль стовпчика H: як тільки в ньому з'явиться значення, менше від заданого в комірці B2, копіювання припиняється. З останнього рядка одержаної таблиці визначаємо шукане x^*: якщо значення в стовпчику F менше від значення в стовпчику G, то обирається число зі стовпчика D, в противному разі – зі стовпчика E.

Таблиця 1 – Розрахункові формули до рис.1

Комірка	**Формула**	**Комірка**	**Формула**
D5	=(B5+C5-$B$2)/2	H5	=ABS(C5-B5)/2
E5	=D5+$B$2	A6	=A5+1
F5	=D5^SIN(D5)+COS(D5^2)	B6	=ЕСЛИ(F5<G5;B5;D5)
G5	Скопійована з комірки F5	C6	=ЕСЛИ(F5>G5;C5;E5)

У випадку використання методу золотого перерізу алгоритм дещо змінюється: значення $x_{1,k}$ і $x_{2,k}$ на k-му кроці вибираються також симетрично відносно центру інтервалу невизначеності, але з врахуванням коефіцієнта пропорційності $\varphi = (3-\sqrt{5})/2 \approx 0{,}381966$:

$$x_{1,k} = a_k + \varphi(b_k - a_k), \quad x_{2,k} = b_k - \varphi(b_k - a_k) \ . \tag{4}$$

Для функцій, обчислення значень яких не потребує значних часових затрат, можна обмежитися тільки введенням значення φ в комірку D2 та зміною формул в комірках D5:E5 на наступні:

D5 - =B5+$D$2*(C5-B5) ; E5 - =C5-$D$2*(C5-B5) .

Зміни, що відбуваються в ході обчислень при такому підході, показані на рис.2.

Оптимізація

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	ε=	0,001	φ=	0,381966				
3								
4	k	a_k	b_k	x_{1k}	x_{2k}	$F(x_{1k})$	$F(x_{2k})$	b_k-a_k
5	0	1,0000	2,0000	1,3820	1,6180	1,041466	0,751120	0,50000
6	1	1,3820	2,0000	1,6180	1,7639	0,751120	0,745870	0,30902
7	2	1,6180	2,0000	1,7639	1,8541	0,745870	0,852545	0,19098
8	3	1,6180	1,8541	1,7082	1,7639	0,724506	0,745870	0,11803
9	4	1,6180	1,7639	1,6738	1,7082	0,726485	0,724506	0,07295
10	5	1,6738	1,7639	1,7082	1,7295	0,724506	0,728923	0,04508
11	6	1,6738	1,7295	1,6950	1,7082	0,723971	0,724506	0,02786
12	7	1,6738	1,7082	1,6869	1,6950	0,724448	0,723971	0,01722
13	8	1,6869	1,7082	1,6950	1,7001	0,723971	0,723982	0,01064
14	9	1,6869	1,7001	1,6919	1,6950	0,724081	0,723971	0,00658
15	10	1,6919	1,7001	1,6950	1,6970	0,723971	0,723947	0,00407
16	11	1,6950	1,7001	1,6970	1,6982	0,723947	0,723950	0,00251
17	12	1,6950	1,6982	1,6962	1,6970	0,723952	0,723947	0,00155
18	13	1,6962	1,6982	1,6970	1,6974	0,723947	0,723947	0,00096

Лист1 Лист2 Лист3

Рисунок 2 – Фрагмент таблиці з розв'язком задачі (метод золотого перерізу)

Видно, що на десятому кроці задана точність ще не досягнута, отже, довелося формули діапазону A15:H15 скопіювати ще на три наступні рядки. Таким чином, наочно підтверджений відомий з теорії факт: збіжність методу золотого перерізу гірша порівняно з методом дихотомії.

Однак, суттєва особливість методу золотого перетину визначається саме вибором коефіцієнта пропорційності φ [3, 4]. Наведене вище значення φ призводить до того, що при визначенні нового інтервалу невизначеності $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ за (2) одна з внутрішніх точок і значення функції в ній вже відомі (це добре видно на рис.2). Як наслідок, на кожній новій ітерації значення цільової функції можна обчислювати тільки один раз, використовуючи для звуження інтервалу невизначеності та його наступного поділу наступні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&F(x_{1,k}) < F(x_{2,k}) \Rightarrow a_{k+1} = a_k; b_{k+1} = x_{2,k}; x_{2,k+1} = x_{1,k};\\
&F(x_{1,k}) \ge F(x_{2,k}) \Rightarrow a_{k+1} = x_{1,k}; b_{k+1} = b_k; x_{1,k+1} = x_{2,k}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Для забезпечення реалізації вказаної переваги методу золотого перерізу доведеться внести більше змін в розрахункові формули (табл.2).

Таблиця 2 – Розрахункові формули для методу золотого перерізу

Комірка	**Формула**	**Комірка**	**Формула**
D5	=B5+$D$2*(C5-B5)	H5	=ABS(C5-B5)/2
E5	=C5-$D$2*(C5-B5)	A6	=A5+1
F5	=D5^SIN(D5)+COS(D5^2)	B6	=ЕСЛИ(F5<G5;B5;D5)
G5	Скопійована з комірки F5	C6	=ЕСЛИ(F5<G5;E5;C5)
Комірка	**Формула**		
D6	=ЕСЛИ(F5<G5;B6+$D$2*(C6-B6);E5)		
F6	=ЕСЛИ(F5<G5;D6^SIN(D6)+COS(D6^2);G5)		
E6	=ЕСЛИ(F5<G5;D5;C6-$D$2*(C6-B6))		
G6	=ЕСЛИ(F5<G5;F5;E6^SIN(E6)+COS(E6^2))		

Результуюча таблиця при цьому повністю співпадає з наведеною на рис.2, але цільова функція обчислюється лише 15 раз (в методі дихотомії – 22). Отже, в випадках, коли визначення кожного значення цільової функції пов'язане з великим обсягом обчислень, метод золотого перерізу може виявитися ефективнішим навіть при використанні сучасної обчислювальної техніки.

Висновки. В результаті проведеного дослідження запропоновано новий підхід до реалізації чисельних методів одновимірної оптимізації, заснований на використанні табличного процесора MS Excel. Наведено алгоритми і результати розв'язання тестової задачі методами дихотомії і золотого перерізу. До найбільш привабливих рис пропонованого підходу слід віднести відмову від безпосереднього програмування, простоту комп'ютерної реалізації, легкість та природність унаочнення результатів. Використання пропонованого підходу в навчальному процесі сприяє кращому засвоєнню теоретичних положень, підвищує мотивацію та зацікавленість в застосуванні методів математичного моделювання.

ЛІТЕРАТУРА

13. Турчак Л.И. Основы численных методов: учеб. пособие. М.: Наука, 1987. 318с.
14. Огурцов А.П., Мамаев Л.М., Каримов И.К. Математические методы и модели в расчетах на ЭВМ: учеб. пособие. К.: ИСМО, 1997. 192с.
15. Леоненков А.В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 704с.
16. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 704с.
17. Карімов І.К. Комп'ютерні методи та засоби розв'язання інженерних задач: навч. посіб. Кам'янське: ДДТУ, 2017. 283с.

Надійшла до редколегії 11.03.2020.