УДК 517.91 DOI 10.31319/2519-2884.33.2018.213

ДАВИДОВ І.А., к.ф.-м.н., доцент
ТОНКОНОГ Є.А., ст. викладач
ХУДА Ж.В., к.ф.-м.н., доцент

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКІВ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Вступ. Диференціальні рівняння як розділ вищої математики і як окрема дисципліна забезпечують формування у студентів наукового світосприйняття через розуміння сутності прикладної та практичної спрямованості математики. Опанування майбутніми фахівцями вміння математичного моделювання під час навчання диференціальних рівнянь уможливлює розробку та аналіз математичних моделей різноманітних процесів, що можуть бути описані диференціальними рівняннями або їх системами.

Серед наукових досліджень, де розглядається математична підготовка студентів ВНЗ, є чимало таких, що стосуються навчання диференціальних рівнянь. Учені акцентували увагу на важливості навчання студентів технічних спеціальностей математичних дисциплін, опанування яких сприятиме формуванню в них вміння створювати й досліджувати математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ. Особливості навчання диференціальних рівнянь студентів технічних спеціальностей аналізували М.Б.Вакджира, Т.В.Крилова, І.В.Михайленко, О.М.Холькін. Головна задача вивчення розділу «Диференціальні рівняння» полягає в тому, щоб навчити студентів формалізувати прикладну задачу і приводити її до типових сучасних задач теорії диференціальних рівнянь, а також виробити у студентів логічне й алгоритмічне мислення, необхідне для розв'язання теоретичних та практичних задач за фахом. Через усвідомлення студентами диференціальних рівнянь як певної системи досягають позитивної динаміки формування навчальних умін майбутніх фахівців щодо застосування процедур розв'язування різних типів диференціальних рівнянь та їх систем, розвитку вміння математичного моделювання певних фізичних, економічних і соціальних процесів за допомогою диференціальних рівнянь, формування фахових компетентностей.

На сьогодні існує велика кількість аналітичних та чисельних методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, за допомогою яких можна здійснювати моделювання динаміки коливальних процесів. Однак, теорія дослідження диференціальних рівнянь вище другого порядку носить фрагментарний характер, дослідженню рівнянь такого типу присвячено незначну кількість праць у порівнянні з дослідженням рівнянь першого та другого порядків.

Постановка завдання. Незважаючи на достатню кількість публікацій, присвячених питанню пошуку розв'язку диференціального рівняння, пропонуємо розглянути ще один метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Нехай рівняння, яке розглядається, задано у вигляді:

$$y^{(4)}(x)+p_{41}(x)y^{(3)}(x)+p_{42}(x)y''(x)+p_{43}(x)y'(x)+p_{44}(x)y(x)=0\,, \tag{1}$$

де $p_{4i}(x), (i=\overline{1,4})$ – неперервно диференційовані функції, $y(x)$, $y^{(i)}(x)$ – шукана функція і її похідні. Потрібно знайти аналітичний розв'язок рівняння (1).

Результати роботи. Нехай $w_k(x)$ $(k=\overline{0,4})$ – визначник Вронського фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння k -го порядку. Враховуючи, що

$$p_{41}(x) = -\frac{w_4'(x)}{w_4(x)}, \tag{2}$$

рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$\frac{y^{(4)}(x)}{w_4(x)} - \frac{y^{(3)}(x)w_4'(x)}{w_4^2(x)} + \frac{p_{42}(x)}{w_4(x)}y''(x) + \frac{p_{43}(x)}{w_4(x)}y'(x) + \frac{p_{44}(x)}{w_4(x)}y(x) = 0\,. \tag{3}$$

Нескладно бачити, що рівняння (3) може бути подане у вигляді

$$\left(\frac{y^{(3)}(x)}{w_4(x)}\right)' + \sum_{k=2}^{4}\frac{p_{4k}(x)}{w_4(x)}y^{(4-k)}(x) = 0\,. \tag{4}$$

Інтегруємо рівняння (4) за змінною x, отримаємо

$$\frac{y^{(3)}(x)}{w_4(x)} + \sum_{k=2}^{4}\int\frac{p_{4k}(x)}{w_4(x)}y^{(4-k)}(x)dx = C_4\,. \tag{5}$$

Для обчислення інтегралів в лівій частині рівності (5) скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$\int\frac{p_{42}(x)}{w_4(x)}y''(x)dx = y''(x)\int\frac{p_{42}(x)}{w_4(x)}dx - \frac{y'''(x)}{w_4(x)}\int w_4(x)\int\frac{p_{42}(x)}{w_4(x)}dx^2 +$$

$$+\int\left(\frac{y'''(x)}{w_4(x)}\right)'\left[\int w_4(x)\int\frac{p_{42}(x)}{w_4(x)}dx^2\right]dx\,; \tag{6}$$

$$\int\frac{p_{43}(x)}{w_4(x)}y'(x)dx = y'(x)\int\frac{p_{43}(x)}{w_4(x)}dx - y''(x)\int\int\frac{p_{43}(x)}{w_4(x)}dx^2 + \frac{y'''(x)}{w_4(x)}\int w_4(x)\int\int\frac{p_{43}(x)}{w_4(x)}dx^3 -$$

$$-\int\left(\frac{y'''(x)}{w_4(x)}\right)'\left[\int w_4(x)\int\int\frac{p_{43}(x)}{w_4(x)}dx^3\right]dx\,; \tag{7}$$

$$\int\frac{p_{44}(x)}{w_4(x)}y(x)dx = y(x)\int\frac{p_{44}(x)}{w_4(x)}dx - y'(x)\int\int\frac{p_{44}(x)}{w_4(x)}dx^2 + y''(x)\int\int\int\frac{p_{44}(x)}{w_4(x)}dx^3 -$$

$$-\frac{y'''(x)}{w_4(x)}\int\int w_4(x)\int\int\int\frac{p_{44}(x)}{w_4(x)}dx^4 + \int\left(\frac{y'''(x)}{w_4(x)}\right)'\left[\int w_4(x)\int\int\int\frac{p_{44}(x)}{w_4(x)}dx^4\right]dx\,. \tag{8}$$

Підставимо обчислені інтеграли (6)-(8) в рівняння (5) і зберемо всі члени, які містять множники $\left(\frac{y'''(x)}{w_4(x)}\right)'$. З формули (4) випливає, що

$$\left(\frac{y'''(x)}{w_4(x)}\right)' = -\sum_{k=2}^{4}\frac{p_{4k}(x)}{w_4(x)}y^{(4-k)}(x)\,. \tag{9}$$

Скориставшись формулою інтегрування частинами, отримаємо

$$\frac{y^{(3)}(x)}{w_4(x)}w_3(x) + \sum_{k=2}^{4}p_{3k}(x)y^{(4-k)}(x) = C_4\,, \tag{10}$$

де
$$w_3(x) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} I_{3m}(x), \tag{11}$$

$$I_{3m}(x) = \int w_4(x) \left[\int \frac{p_{42}(x)}{w_4(x)} I_{3,m-1}(x)dx - \int\int \frac{p_{43}(x)}{w_4(x)} I_{3,m-1}(x)dx^2 + \right.$$
$$\left. + \int\int\int \frac{p_{44}(x)}{w_4(x)} I_{3,m-1}(x)dx^3 \right] dx, \qquad I_{3,0}(x) = 1, \tag{12}$$

коефіцієнти p_{4i} $(i = \overline{2,4})$ знаходяться за формулами

$$p_{32}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left[\int \frac{p_{42}(x)}{w_4(x)} I_{3,m-1}(x)dx - \int\int \frac{p_{43}(x)}{w_4(x)} I_{3,m-1}(x)dx^2 + \right.$$
$$\left. + \int\int\int \frac{p_{44}(x)}{w_4(x)} I_{3,m-1}(x)dx^3 \right] dx, \tag{13}$$

$$p_{33}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left[\int \frac{p_{43}(x)}{w_4(x)} I_{3,m-1}(x)dx - \int\int \frac{p_{44}(x)}{w_4(x)} I_{3,m-1}(x)dx^2 \right], \tag{14}$$

$$p_{34}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \int \frac{p_{44}(x)}{w_4(x)} I_{3,m-1}(x)dx. \tag{15}$$

Враховуючи, що $w_3'(x) = -w_4(x) p_{32}(x)$, рівняння (10) перепишемо у вигляді

$$\left(\frac{y''(x)}{w_4(x)} \right)' + \sum_{k=3}^{4} \frac{w_4(x)}{w_3^2(x)} p_{3k}(x) y^{(4-k)}(x) = C_4 \frac{w_4(x)}{w_3^2(x)}. \tag{16}$$

Тепер інтегруємо диференціальне рівняння (16) за змінною x, отримаємо

$$\frac{y''(x)}{w_4(x)} + \sum_{k=3}^{4} \int \frac{w_4(x)}{w_3^2(x)} p_{3k}(x) y^{(4-k)}(x)dx = C_4 \int \frac{w_4(x)}{w_3^2(x)} dx + C_3. \tag{17}$$

Скориставшись алгоритмом, розробленим вище, після нескладних перетворень маємо

$$\frac{y''(x)}{w_4(x)} w_2(x) + p_{23}(x) y'(x) + p_{24}(x) y(x) = C_4 \int \frac{w_2(x) w_4(x)}{w_3^2(x)} dx + C_3, \tag{18}$$

де
$$w_2(x) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} I_{2m}(x), \tag{19}$$

$$I_{2m}(x) = \int w_3(x) \left[\int \frac{p_{33}(x)}{w_3^2(x)} I_{2,m-1}(x)dx - \int\int \frac{p_{34}(x)}{w_3^2(x)} I_{2,m-1}(x)dx^2 \right] dx, \tag{20}$$

$$I_{2,0}(x) = 1;$$

$$p_{23}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left[\int \frac{p_{33}(x)}{w_3^2(x)} I_{2,m-1}(x)dx - \int\int \frac{p_{34}(x)}{w_3^2(x)} I_{2,m-1}(x)dx^2 \right] dx, \tag{21}$$

$$p_{24}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int\frac{p_{34}(x)}{w_3^2(x)}I_{2,m-1}(x)dx\,. \qquad (22)$$

Враховуючи, що $w_2'(x)=-w_3(x)p_{23}(x)$, рівняння (18) перепишемо у вигляді

$$\left(\frac{y'(x)}{w_2(x)}\right)'+\frac{w_3(x)}{w_3^2(x)}p_{24}(x)y(x)=C_4\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}\int\frac{w_2(x)w_4(x)}{w_3^2(x)}dx+C_3\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}. \qquad (23)$$

Після інтегрування рівняння (23) отримаємо

$$\frac{y'(x)w_1(x)}{w_2(x)}+p_{14}(x)y(x)=C_4\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}\int\frac{w_2(x)w_4(x)}{w_3^2(x)}dx^2+C_3\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}dx+C_2\,, \qquad (24)$$

де

$$w_1(x)=1-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}I_{1m}(x) \qquad (25)$$

$$I_{1m}(x)=\int w_2(x)\int\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}p_{24}(x)I_{1,m-1}(x)dx^2 \qquad (26)$$

$$p_{14}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}p_{24}(x)I_{1,m-1}(x)dx\,. \qquad (27)$$

З (25) і (27) випливає

$$w_1'(x)=-w_2(x)p_{14}(x)\,. \qquad (28)$$

Враховуючи (25)-(28), рівняння (24) перепишемо у вигляді

$$\left(\frac{y(x)}{w_1(x)}\right)'=C_4\frac{w_2(x)}{w_1^2(x)}\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}\int\frac{w_2(x)w_4(x)}{w_3^2(x)}dx^2+$$

$$+C_3\frac{w_2(x)}{w_1^2(x)}\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}dx+C_2\frac{w_2(x)}{w_1^2(x)}\,. \qquad (29)$$

Після інтегрування рівняння (29) отримаємо розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$y(x)=w_1(x)\left[C_1+C_2\int\frac{w_0(x)w_2(x)}{w_1^2(x)}dx+C_3\int\frac{w_0(x)w_2(x)}{w_1^2(x)}\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}dx^2+\right.$$

$$\left.+C_4\int\frac{w_0(x)w_2(x)}{w_1^2(x)}\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}\int\frac{w_2(x)w_4(x)}{w_3^2(x)}dx^3\right], \qquad (30)$$

де $w_1(x)=y_1(x),\ w_0(x)=1$.

Формула (30) є узагальненням формули Абеля на випадок лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами.

З'ясуємо умови, при яких $w_k(x)$ будуть виражені через елементарні функції. Враховуючи формулу (11), припустимо, що $I_{31}(x)=0$, тобто

$$\int \frac{p_{42}(x)}{w_4(x)} dx - \int\int \frac{p_{43}(x)}{w_4(x)} dx^2 - \int\int\int \frac{p_{44}(x)}{w_4(x)} dx^3 = 0 . \quad (31)$$

Диференціюємо (31) тричі за змінною x, отримаємо

$$\left(\frac{p_{42}(x)}{w_4(x)} \right)'' - \left(\frac{p_{43}(x)}{w_4(x)} \right)' - \frac{p_{44}(x)}{w_4(x)} = 0 . \quad (32)$$

При виконанні умов (31) або (32) випливає, що $w_3(x) = 1$. Враховуючи (19), $I_{21}(x) = 0$,

або
$$\int p_{33}(x) dx - \int\int p_{34}(x) dx^2 = 0 . \quad (33)$$

Після диференціювання рівності (33) двічі маємо умову

$$p_{33}'(x) - p_{34}(x) = 0 . \quad (34)$$

Розглянемо зниження порядку і відшукання розв'язку лінійних однорідних диференціальних рівнянь третього порядку

$$y^{(3)}(x) + p_{31}(x) y''(x) + p_{32}(x) y'(x) + p_{33}(x) y(x) = 0 . \quad (35)$$

Нехай

$$p_{31}(x) = -\frac{w_3'(x)}{w_3(x)}, \quad (36)$$

тоді рівняння (35) перепишемо у вигляді

$$\frac{y^{(3)}(x)}{w_3(x)} - \frac{w_3'(x)}{w_3^2(x)} y''(x) + \frac{p_{32}(x)}{w_3(x)} y'(x) + \frac{p_{33}(x)}{w_3(x)} y(x) = 0 \quad (37)$$

або
$$\left(\frac{y''(x)}{w_3(x)} \right)' + \frac{p_{32}(x)}{w_3(x)} y'(x) + \frac{p_{33}(x)}{w_3(x)} y(x) = 0 . \quad (38)$$

Після інтегрування рівняння (37) отримаємо рівняння другого порядку

$$\frac{y''(x)}{w_3(x)} + \int \frac{p_{32}(x)}{w_3(x)} y'(x) dx + \int \frac{p_{33}(x)}{w_3(x)} y(x) dx = C_3 . \quad (39)$$

При обчисленні інтегралів скористаємось алгоритмом, розробленим вище. Після нескладних перетворень маємо

$$\frac{y''(x)}{w_3(x)} w_2(x) + p_{22}(x) y'(x) + p_{23}(x) y(x) = C_3 , \quad (40)$$

де
$$w_2(x) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} I_{2m}(x), \qquad I_{20}(x) = 1 , \quad (41)$$

$$I_{2m}(x) = \int w_3(x) \left[\int \frac{p_{32}(x)}{w_3(x)} I_{2,m-1}(x) dx - \int\int \frac{p_{33}(x)}{w_3(x)} I_{2,m-1}(x) dx^2 \right] dx , \quad (42)$$

$$p_{22}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left[\int \frac{p_{33}(x)}{w_3(x)} I_{2,m-1}(x) dx - \int\int \frac{p_{33}(x)}{w_3(x)} I_{2,m-1}(x) dx^2 \right] dx , \quad (43)$$

$$p_{23}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int\frac{p_{33}(x)}{w_3(x)}I_{2,m-1}(x)dx\,. \tag{44}$$

Враховуючи, що $w_2'(x)=-w_3(x)p_{22}(x)$, рівняння (40) перепишемо у вигляді

$$\left(\frac{y'(x)}{w_2(x)}\right)'+\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}p_{23}(x)y(x)=C_3\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}. \tag{45}$$

Після інтегрування рівняння (45) отримаємо

$$\frac{y'(x)}{w_2(x)}+\int\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}p_{23}(x)y(x)dx=C_3\int\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}dx+C_2 \tag{46}$$

або
$$\frac{y'(x)}{w_2(x)}w_1(x)+p_{13}(x)y(x)=C_3\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}dx+C_2\,, \tag{47}$$

де
$$w_1(x)=1-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}I_{1m}(x),\qquad I_{10}(x)=1\,, \tag{48}$$

$$I_{1m}(x)=\int w_2(x)\int\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}p_{23}(x)I_{1,m-1}(x)dx^2\,, \tag{49}$$

$$p_{13}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\int\frac{w_3(x)}{w_2^2(x)}p_{23}(x)I_{1,m-1}(x)dx\,. \tag{50}$$

Враховуючи, що $w_1'(x)=-w_2(x)p_{13}(x)$, рівняння (47) перепишемо у вигляді

$$\left(\frac{y(x)}{w_1(x)}\right)'=C_3\frac{w_2(x)}{w_1^2(x)}\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}dx+C_2\frac{w_2(x)}{w_1^2(x)}. \tag{51}$$

Після інтегрування рівняння (51) отримаємо

$$\frac{y(x)}{w_1(x)}=C_3\int\frac{w_0(x)w_2(x)}{w_1^2(x)}\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}dx^2+C_2\int\frac{w_0(x)w_2(x)}{w_1^2(x)}dx+C_1\,, \tag{52}$$

де $w_0(x)=1,\ \ w_1(x)=y_1(x)$.

З формули (52) отримаємо розв’язок рівняння (35) у вигляді

$$y(x)=w_1(x)\left[C_1+C_2\int\frac{w_0(x)w_2(x)}{w_1^2(x)}dx+C_3\int\frac{w_0(x)w_2(x)}{w_1^2(x)}\int\frac{w_1(x)w_3(x)}{w_2^2(x)}dx^2\right]. \tag{53}$$

Формула (53) є узагальненням формули Абеля на випадок лінійних диференціальних рівнянь третього порядку зі змінними коефіцієнтами.

З’ясуємо умови, при яких $w_2(x)$ будуть виражені через елементарні функції. Враховуючи формулу (42), припустимо, що $I_{21}(x)=0$, тобто виконується

$$\int \frac{p_{32}(x)}{w_3(x)} dx - \iint \frac{p_{33}(x)}{w_3(x)} dx^2 = 0 . \tag{54}$$

Після диференціювання рівності (58) двічі маємо умову

$$\left(\frac{p_{32}(x)}{w_3(x)} \right)' - \frac{p_{33}(x)}{w_3(x)} = 0 . \tag{55}$$

Висновок. Побудовано новий метод розв’язання лінійних однорідних диференціальних рівнянь третього та четвертого порядків зі змінними коефіцієнтами, який дозволяє отримати розв’язок в аналітичному вигляді на всій області визначення рівняння. Досліджено та обґрунтовано умови, які забезпечують можливість використання запропонованого методу. Знайдено рекурентну формулу для знаходження частинного розв’язку, яка спрощує процес розв’язання наведених рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бондаренко З.В. Вища математика. Диференціальні рівняння (з комп’ютерною підтримкою): навч. посіб. / З.В.Бондаренко, В.І.Клочко. – Вінниця: ВНТУ, 2013. – 252с.
2. Клочко В.І. Формування знань майбутніх інженерів з розв’язування диференціальних рівнянь: монографія / В.І.Клочко; З.В.Бондаренко. – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 252с.
3. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння / А.М.Самойленко; М.О.Перестюк, І.О.Парасюк. – К.: Вища школа, 1994. – 544с.

Надійшла до редколегії 25.06.2018

УДК 504.062.2 DOI 10.31319/2519-2884.33.2018.214

ГУБАРЄВ І.В., к.т.н., професор,
засл. тренер України
ВОВК А.А., студентка
ЛУНИЧЕНКО Н.В.*, методист

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам’янське
*Департамент з гуманітарних питань Кам’янської міської ради

СПРИЯННЯ РОЗВИТКУ МИСЛЕННЯ І КМІТЛИВОСТІ ПІД ЧАС ЗАПРОВАДЖЕННЯ ШАШКОВОГО СПОРТУ У НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

Вступ. У сучасному світі велика кількість молоді захоплюється фізичними видами спорту і багато з них навіть не уявляють, що деякі ігри, наприклад гра у шашки, теж відноситься до категорії видів спорту, тільки розумових. Незважаючи на уявну простоту цієї гри, вона давно вірно служить людям не лише для розваги, а й для розвитку аналітичних та математичних здібностей, вимагає від граючого посиленої діяльності думки, винахідливості і кмітливості, сприяє розвитку пам’яті та уваги. Саме це спонукає у сучасних умовах місцеве самоврядування до пошуку в регіонах країни методів розширення кола спілкування, можливості самовираження, сприяння розвитку логіки мислення, концентрації уваги та виховання волі серед учнів та студентів шляхом впровадження у закладах освіти навчання молоді гри в шашки з самого раннього віку, зі спробою знайти ефективний в наших умовах підхід до пошуку і виховання інтелектуально обдарованої молоді. Однак на сьогодні серед основних проблем розвитку на міс-