6. Благодир Л.М. Визначення перспектив розвитку переробних підприємств олійно-жирової галузі України на основі виробничої функції Кобба–Дугласа / Л.М.Благодир, О.В.Мороз, Б.Є.Грабовецький // Актуальні проблеми економіки. – 2010. – №2. – С.241-251.
7. Гуменюк В.Я. Переваги та недоліки застосування функції Коба–Дугласа як інструменту управління виробничими ресурсами транспортних підприємств / В.Я.Гуменюк, Н.Б.Ярошевич // Вісник Національного університету „Львівська політехніка". Проблеми економіки та управління. – 2000. – №391. – С.187-162.
8. Шарко І.О. Застосування апарату виробничих функцій для оцінки ефективності використання ресурсного потенціалу сільськогосподарських підприємств / І.О.Шарко, Ю.В.Пащенко // Інноваційна економіка. – 2012. – №11. – С.60-64.

Надійшла до редколегії 25.09.2018.

УДК 530.12 DOI 10.31319/2519-2884.33.2018.202

САМОХВАЛОВ С.Є., д.т.н., професор

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

КІНЕМАТИЧНЕ ПЕРЕНОРМУВАННЯ ЕНЕРГІЇ В ТЕОРІЇ ГРАВІТАЦІЇ

Вступ. Ні в кого не виникає сумнівів, що для того, щоб наздогнати автобус, який рушає з зупинки, треба затратити певну енергію. Тож при перетвореннях групи GL^g, які описують зміну неінерціальних в загальному випадку систем відліку, повна енергія повинна змінюватися. З формальної точки зору це має місце внаслідок того, що при GL^g-перетвореннях зі змінними параметрами $\partial_\mu L^{m'}_{n} \neq 0$, лагранжіан L_γ змінюється: до нього додається дивергенція

$$L_{\gamma'} = L_\gamma + \partial_\sigma \Delta V^\sigma, \tag{1}$$

де

$$\Delta V^\sigma = \Sigma_m^{\sigma\nu n} \Delta\gamma^m_{\nu n} = e\,\Delta\gamma^{[\sigma\nu]}_{\nu\ \cdot}, \tag{2}$$

причому

$$\Delta\gamma^{\ m}_{\nu n} := \partial_\nu L_{s'}^{\ m} L^{s'}_{\ n} = -L_{s'}^{\ m}\partial_\nu L^{s'}_{\ n}, \tag{3}$$

а $e = \sqrt{-g}$. Перетворення (1) є канонічним перетворенням з твірними функціями ΔV^σ [1], які визначаються матрицею переходу $L^{s'}_{\ n}$ між загальними системами відліку, і не змінює рівняння руху, незважаючи на те, що воно змінює енергію-імпульс гравітаційного поля. Через те, що ця зміна обумовлена виключно поверхневим доданком $\partial_\sigma \Delta V^\sigma$, зміна енергії-імпульсу при зміні загальної системи відліку має голографічну природу і є варіантом так званого голографічного перенормування [2].

Постановка задачі. Дана робота є продовженням роботи [3] і зберігає прийняті в ній позначення. Тут вивчається зміна енергії-імпульсу гравітаційного поля та суперпотенціалу повної енергії-імпульсу системи при зміні загальної системи відліку.

Результати роботи. *1. Перетворення енергії-імпульсу при зміні системи відліку.*

Для визначення зміни енергії-імпульсу при зміні загальної системи відліку зауважимо спочатку, що для перетворень з калібрувальної групи $G^g = T^g \times)GL^g$, яка зберігає лагранжіан Гілберта L_R і є групою симетрії ТГАР, має місце рівність:

$$\delta' L_{\gamma'} = \delta' L_{\gamma} + \partial_{\sigma} \delta' \Delta V^{\sigma} , \tag{4}$$

що є умовою G^{g}-симетрії ТГАР, де

$$\delta' \Delta V^{\sigma} := \delta \Delta V^{\sigma} + \partial_{\rho} \Delta V^{\rho} \delta x^{\sigma} , \tag{5}$$

причому

$$\delta \Delta V^{\sigma} = \delta \Sigma_{m}^{\sigma \nu n} \Delta \gamma_{\nu n}^{m} + \delta_{l} \Delta V^{\sigma} , \tag{6}$$

$$\delta \Sigma_{m}^{\sigma \nu n} \Delta \gamma_{\nu n}^{m} = \Delta B_{m}^{\mu \sigma} \delta h_{\mu}^{m} + \tfrac{1}{2} \Delta D^{mn \sigma} \delta g_{mn} , \tag{7}$$

де

$$\Delta B_{m}^{\mu \sigma} := \partial_{h_{\mu}^{m}} \Sigma_{p}^{\sigma \nu s} \Delta \gamma_{\nu s}^{p} = e \Delta \gamma^{[\sigma}{}_{s}{}^{\mu]}{}_{.} + h_{s}^{\sigma} \Delta V^{\mu} - h_{s}^{\mu} \Delta V^{\sigma} , \tag{8}$$

$$\tfrac{1}{2} \Delta D^{mn \sigma} := \partial_{g_{mn}} \Sigma_{p}^{\sigma \nu s} \Delta \gamma_{\nu s}^{p} = -e \Delta \gamma^{\sigma \{mn\}} + e \Delta \gamma_{s}^{s\{m} g^{n\} \sigma} + g^{mn} \Delta V^{\sigma} , \tag{9}$$

$$\delta_{l} \Delta V^{\sigma} = \Sigma_{m}^{\sigma \nu n} \delta \Delta \gamma_{\nu n}^{m} . \tag{10}$$

Зважимо, що в штрихованій системі відліку інфінітезимальні GL^{g}-перетворення параметризуються величинами $l^{m'}_{n'} = \delta L^{m'}{}_{n} L_{n'}{}^{n}$, для яких $\partial_{\nu} l^{m'}_{n'} = -L^{m'}{}_{m} L_{n'}{}^{n} \delta \Delta \gamma_{\nu n}^{m}$. Отже умову GL^{g}-інваріантності ТГАР в штрихованій системі відліку можна подати у вигляді

$$\partial_{\sigma} (M'^{\sigma n}_{m'} \delta L^{m'}{}_{n} - \delta_{l} \Delta V^{\sigma}) = 0 . \tag{11}$$

Враховуючи все це, інтегральна варіація поверхневого члену виражається через варіації польових величин наступним чином:

$$\partial_{\sigma} \delta' \Delta V^{\sigma} = \partial_{\sigma} (\Delta B_{m}^{\mu \sigma} \delta h_{\mu}^{m} + \tfrac{1}{2} \Delta D^{mn \sigma} \delta g_{mn} + M'^{\sigma n}_{m'} \delta L^{m'}{}_{n} + \partial_{\rho} \Delta V^{\rho} \delta x^{\sigma}) . \tag{12}$$

При калібрувальних трансляціях $\delta = \delta_t$ поверхневий член інваріантний, що призводить до тотожності:

$$\partial_{\sigma} \delta'_{t} \Delta V^{\sigma} = -\partial_{\sigma} (\Delta t_{m}^{\sigma} t^{m} + \Delta B_{m}^{\mu \sigma} \partial_{\mu} t^{m}) \equiv 0 , \tag{13}$$

де

$$\Delta t_{m}^{\sigma} = \Delta B_{s}^{\mu \sigma} F_{\mu m}^{s} + \tfrac{1}{2} \Delta D^{ps \sigma} \partial_{m} g_{ps} - \partial_{\rho} \Delta V^{\rho} h_{m}^{\sigma} - M'^{\sigma s}_{p} \Delta \gamma_{ms}^{p} . \tag{14}$$

Тут враховано, що $\delta L^{m'}{}_{n} = -\partial_{\tau} L^{m'}{}_{n} \delta x^{\tau} = L^{m'}{}_{s} \Delta \gamma_{mn}^{s} t^{m}$. З (13), зокрема, слідує тотожність

$$\partial_{\sigma} \Delta B_{m}^{\mu \sigma} + \Delta t_{m}^{\mu} \equiv 0 . \tag{15}$$

Легко переконатися, що ця тотожність співпадає з тотожною рівністю нулю варіаційної похідної від поверхневого члену $\delta_{h_{\mu}^{m}} \partial_{\sigma} \Delta V^{\sigma} \equiv 0$, оскільки

$$\Delta B_{m}^{\mu \sigma} = \partial_{\partial_{\sigma} h_{\mu}^{m}} \partial_{\rho} \Delta V^{\rho} , \quad \Delta t_{m}^{\mu} = -\partial_{h_{\mu}^{m}} \partial_{\rho} \Delta V^{\rho} . \tag{16}$$

Підставляючи тепер (13) в (4) для випадку калібрувальних трансляцій одержуємо:

$$\delta'_t L_{\gamma'} = \tfrac{1}{2} e G^{\mu\nu} \delta_t g_{\mu\nu} - \partial_\sigma (t'^{\sigma}_m t^m + B'^{\mu\sigma}_m \partial_\mu t^m), \tag{17}$$

де

$$t'^{\mu}_m = t^{\mu}_m + \Delta t^{\mu}_m \ , \quad B'^{\mu\sigma}_m = B^{\mu\sigma}_m + \Delta B^{\mu\sigma}_m \tag{18}$$

– ренормовані вирази тензорної густини енергії-імпульсу та індукції гравітаційного поля (суперпотенціалу енергії-імпульсу), а саме, їх вирази в штрихованій системі відліку, прискореній і деформованій по відношенню до вихідної системи. Ренормування відбувається за рахунок канонічного перетворення (1), при якому до вихідного лагранжіану додається поверхневий член $\partial_\sigma \Delta V^\sigma$, що і визначає зміни Δt^{μ}_m і $\Delta B^{\mu\sigma}_m$, отже таке ренормування має голографічну природу.

Калібрувальна трансляційна інваріантність ренормованого лагранжіану $\delta'_t L_{\gamma'} = 0$ призводить, зокрема, до сильної тотожності:

$$\partial_\sigma B'^{\mu\sigma}_m + t'^{\mu}_m = -e G^{\mu}_m . \tag{19}$$

Тотожність (19) легко одержати також взяттям варіаційної похідної від обох частин формули (1) з врахуванням формули (16).

Формула (19) показує, що канонічне перетворення (1), пов'язане зі зміною систем відліку, призводить до зміни розбиття тензора Ейнштейна на дивергенцію індукції гравітаційного поля $\partial_\sigma B^{\mu\sigma}_m$ і тензорну густину його енергії-імпульсу t^{μ}_m.

При деформації групи T^g, яка на інфінітезимальному рівні зводиться до її перепараметризації $t^m = N^m{}_a \tilde{t}^a$, індукція гравітаційного поля перетворюється за законом $\tilde{B}^{\mu\sigma}_a = B^{\mu\sigma}_m N^m{}_a$, а тензорна густина його енергії-імпульсу – за законом $\tilde{t}^{\sigma}_a = t^{\sigma}_m N^m{}_a + B^{\mu\sigma}_m \partial_\mu N^m{}_a$. Отже, деформацією групи T^g неможливо компенсувати (або згенерувати) перетворення ренормування (18), пов'язані зі зміною загальної системи відліку.

Для порівняння енергії-імпульсу в різних системах відліку слушно перейти в єдину спільну для всіх систем параметризацію зрушень $\tilde{t}^{\mu} = h^{\mu}_m t^m = \delta x^{\mu}$ вздовж ейлерових координат (які відповідають параметрам недеформованої групи дифеоморфізмів).

2. Голономні та галілеєві системи відліку. В даному розділі розглянуто два окремі класи загальних систем відліку. По-перше, це голономні системи, що описуються реперними полями з нульовим об'єктом неголономності, отже можуть бути реалізованими як координатні репери певних систем координат, що відповідає системам відліку, якими обмежується ЗТВ. По-друге, це галілеєві системи, що описуються (псевдо)ортонормованими реперними полями, які використовуються в ТГОР (або різних варіантах телепаралелізму).

Почнемо з голономних систем, для яких коефіцієнти неголономності дорівнюють нулю:

$$F^m_{\mu\nu} = \partial_\nu h^m_\mu - \partial_\mu h^m_\nu = 0 , \tag{20}$$

отже існують такі функції $y^m(x)$, що $h^m_\mu = \partial_\mu y^m$, $h = \partial y$. Величини y^m, що задають голономні системи відліку, грають роль лагранжевих координат на відміну від координат x^μ в просторі-часі, які нумерують його точки і грають роль ейлерових координат. Отже функції $y^m(x)$ є скалярами по відношенню до перетворень координат $x'^\mu = x'^\mu(x)$ (в пасивному підході), або інваріантні при калібрувальних трансляціях простору-часу $x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}(x)$ (в активному підході, якого ми притримуємося): $y'^{m}(x') = y^{m}(x)$, що, власне, і дозволяє їх інтерпретувати, як лагранжеві координати гравітуючої системи. Репери голономних систем є координатними реперами ∂_m координат y^m.

На відміну від ейлерових координат x^{μ}, які нумерують точки простору-часу і зміна яких не повинна призводити до зміни будь-яких фізичних величин (коваріантність по відношенню до перетворень x^{μ}), лагранжеві координати y^m несуть в собі фізичний зміст, оскільки їх зміна призводить до зміни фізичної системи відліку, внаслідок чого можуть змінюватися певні фізичні величини, як то енергія-імпульс системи, тощо. Якщо при перетвореннях світових координат x^{μ} відбуваються калібрувальні трансляції в просторі-часі в фіксованій загальній системі відліку, які належать групі T^g, то зі зміною лагранжевих координат y^m трансляцій не відбувається, а відбуваються перетворення голономних систем відліку, і такі перетворення належать вже іншій групі, а саме групі GL^g, утворюючи її підгрупу, яка внаслідок обмеження голономними системами відліку ізоморфна групі дифеоморфізмів T^g.

Внаслідок умови (20), за відсутності скруту і узгодженості зв'язності з метрикою, в голономних системах відліку $\omega^{\cdot}_{mkn} = 0$, і коефіцієнти зв'язності зводяться до величин $\sigma^{\cdot}_{mkn} = \Gamma^{\cdot}_{mkn}$, які є символами Крістоффеля в лагранжевих координатах y^m, отже ведуть себе як скаляри при перетвореннях ейлерових координат x^{μ}. Це в даному випадку, як і для довільного афінного репера, забезпечує загальноковаріантність (калібрувальну трансляційну інваріантність) розбиття лагранжіана Гілберта на об'ємну і поверхневу компоненти

$$L_R = L_{\Gamma} - \partial_{\sigma} V^{\sigma}_{\Gamma}\,, \tag{21}$$

де при виконанні умов метричності і відсутності скруту маємо:

$$L_{\Gamma} = \Sigma^{\mu\nu\, n}_{m} \Gamma^{m}_{\mu\, s} \Gamma^{s}_{\nu\, n} = \partial y\, l\, \Gamma^{[m}_{m\, s} \Gamma^{|s|n]}_{n\,\cdot}\,, \tag{22}$$

$$V^{\sigma}_{\Gamma} = \Sigma^{\sigma\nu\, n}_{m} \Gamma^{m}_{\nu\, n} = \partial y\, l\, \Gamma^{[\sigma\, n]}_{n\,\cdot} \tag{23}$$

(вертикальними рисками виділяються індекси, що пропускаються при антисиметризації).

Дія, пов'язана з об'ємним лагранжіаном, може бути представленою як інтеграл по лагранжевим координатам y^m:

$$S_{\Gamma} = \int L_{\Gamma} dx = \int \delta^{kp}_{mn} \Gamma^{m}_{k\, s} \Gamma^{s\, n}_{p\,\cdot}\, l\, dy\,, \tag{24}$$

де dx і $dy = \partial y\, dx$ – координатні об'єми ейлерових та лагранжевих координат. Через це дія S_{Γ}, очевидно, інваріантна при перетвореннях світових (ейлерових) координат.

Індукція гравітаційного поля в голономних системах конкретизується наступним чином:

$$B^{\sigma\mu}_{m} = \partial y\, l\, \partial_m x^{\lambda} (\Gamma^{[\sigma\,\mu]}_{\lambda\,\cdot} + \delta^{\sigma}_{\lambda}\, \Gamma^{[\mu\, n]}_{n\,\cdot} - \delta^{\mu}_{\lambda}\, \Gamma^{[\sigma\, n]}_{n\,\cdot})\,, \tag{25}$$

а тензор енергії-імпульсу, через умову (20), як

$$t^{\sigma}_{m} = D^{n\,\sigma}_{s} \Gamma^{s}_{nm} - \partial_m x^{\sigma} L_{\Gamma}\,, \tag{26}$$

де в нашому випадку:

$$D^{ns\sigma} = \partial y\, l\,(-\Gamma^{\sigma ns} + \Gamma_p^{\ p\{n} g^{s\}\sigma} + g^{ns}\Gamma^{[\sigma\, p]}_{\ \ p\,\cdot})\,, \qquad (27)$$

отже

$$t_m^{\sigma} = \partial y\, l\,(-\Gamma^{\sigma}_{sn}\Gamma^{sn}_{m\cdot} + \Gamma^{p}_{pn}\Gamma^{\{\sigma n\}}_{m\cdot} + \Gamma^{[\sigma n]}_{n\,\cdot}\Gamma^{p}_{pm} - \partial_m x^{\sigma}\Gamma^{[p}_{ps}\Gamma^{|s|n]}_{n\,\cdot})\,. \qquad (28)$$

По відношенню до перетворень ейлерових координат x^{μ} індукція гравітаційного поля, що дається формулою (25), описується чотирма антисиметричними за верхніми індексами тензорними густинами $B_m^{\sigma\mu}$, а енергія-імпульс гравітаційного поля, згідно з (28), описується чотирма векторними густинами t_m^{σ}, які відповідають чотирьом лагранжевим координатам y^m. При перетвореннях лагранжевих координат y^m як $B_m^{\sigma\mu}$, так і t_m^{σ} перетворюються за нетензорними законами згідно з формулами (18), конкретизованими для випадку переходу між голономними реперами.

У випадку ототожнення лагранжевих координат з ейлеревими $y^{\mu} = x^{\mu}$, t_m^{σ} переходить в комплекс енергії-імпульсу гравітаційного поля Ейнштейна, а $B_m^{\sigma\mu}$ – в суперпотенціал Фреуда [2]. При цьому тензорні властивості величин t_m^{σ} і $B_m^{\sigma\mu}$ при перетвореннях координат x^{μ} порушуються саме завдяки ототожненню $y^{\mu} = x^{\mu}$, яке жорстко зв'язує трансляції в просторі-часі зі зміною системи відліку.

Враховуючи той факт, що $\Gamma^{s}_{sn} = \frac{1}{2} g^{pk}\partial_n g_{pk} = \frac{1}{l}\partial_n l$, а також умову (20), в голономних системах відліку тензорна густина власного моменту імпульсу (спіну) гравітаційного поля S^{σ}_{mn} і її суперпотенціал $\Sigma^{\sigma\nu}_{mn}$ можуть бути поданими у вигляді: $S^{\sigma}_{mn} = \partial y\, \partial_{[m} x^{\sigma}\partial_{n]} l$, $\Sigma^{\sigma\nu}_{mn} = \partial y\, l\, \delta^{\sigma\nu}_{mn}$. Рівняння Палатіні перетворюється за тензорним законом при перетворенні як ейлерових x^{μ}, так і лагранжевих координат y^m.

Оскільки голономні системи відліку повністю визначаються функціями $y^m = y^m(x)$, що зв'язують лагранжеві та ейлерові координати, саме їх, замість $h^m_{\mu} = \partial_{\mu} y^m$, можна вибрати в якості незалежних польових змінних в цьому випадку. Лагранжіан L_{Γ} (22) не залежить від самих функцій $y^m(x)$, а лише від їх похідних, отже поля $y^m(x)$ є циклічними координатами системи, і рівняння руху для них зводяться до умови збереження відповідного узагальненого імпульсу $P^{\sigma}_m = \partial_{\partial_{\sigma} y^m} L_{\Gamma}$: $\partial_{\sigma} P^{\sigma}_m = 0$, який, з точністю до знака, співпадає з тензорною густиною енергії-імпульсу гравітуючої системи: $P^{\sigma}_m = -T^{\sigma}_m$.

Недоліком голономних систем відліку є їх неминуча деформація в кривому просторі при переході між системами відліку з тензором інфінітезимальної деформації $\sigma^{mn} = g^{s\{m}\partial_s \delta y^{n\}}$. Такого недоліку, очевидно, позбавлені загальні системи відліку, для яких $g_{mn} = const$, зокрема (псевдо)ортонормовані системи відліку, коли $g_{mn} = \eta_{mn}$. В даному випадку $\sigma^{\cdot}_{mkn} = 0$, і коефіцієнти зв'язності зводяться до величин $\omega^{\cdot}_{mkn}$, які при цьому здобувають смисл коефіцієнтів обертання Річчі.

Лагранжіан теорії гравітації в ортогональному репері і відповідний вектор, що визначає поверхневий член, записуються у вигляді:

$$L_\omega = \Sigma_m^{\mu\nu n}\omega_{\mu s}^m \omega_{\nu n}^s = h\omega_{ms}^{[m}\omega_{n\cdot}^{|s|n]} = \frac{h}{2}(\omega_{ns}^m \omega_{m\cdot}^{ns} - R_s R^s), \tag{29}$$

$$V_\omega^\sigma = \Sigma_m^{\sigma\nu n}\omega_{\nu n}^m = -hR^\mu, \tag{30}$$

де $R_n = \nabla_\sigma h_n^\sigma = F_{mn}^m$ є вектором, що має важливий геометричний смисл і визначає швидкість зміни локального об'єму вздовж напрямків базисних векторів обраного ортонормованого репера. При записі цих формул враховано антисиметрію коефіцієнтів обертання Річчі $\omega_{mkn}^{\cdot}$ по першому і останньому індексах і рівність $\omega_{mn}^m = R_n$.

Індукція гравітаційного поля в ортонормованих системах відліку дається виразом:

$$B_m^{\sigma\mu} = h(\omega_{m\cdot}^{\sigma\mu} - h_m^\sigma R^\mu + h_m^\mu R^\sigma). \tag{31}$$

Визначною особливістю ортонормованих систем відліку є той факт, що коефіцієнти зв'язності однозначно визначаються індукцією гравітаційного поля, тобто формулу (31) можна обернути. Дійсно, з (31) слідує: $B_m^{m\mu} = -2hR^\mu$, отже $\omega_{m\cdot}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2h}(2B_m^{\sigma\mu} - h_m^\sigma B_m^{m\mu} + h_m^\mu B_m^{m\sigma})$.

Тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля в нашому випадку, внаслідок $D_s^{n\sigma} = 0$, визначається виразом:

$$t_m^\sigma = B_s^{n\sigma} F_{nm}^s - h_m^\sigma L_\omega. \tag{32}$$

При обмеженні ортонормованими системами відліку група GL^g звужується до групи Λ^g локально-лоренцевих перетворень ортонормованих реперних полів, з симетрією відносно якої пов'язаний внутрішній момент (спін) гравітаційного поля, густина струму якого та відповідний суперпотенціал в означеному випадку визначаються виразами: $S_{mn}^\sigma = -\frac{h}{2}(F_{mn}^\sigma - h_m^\sigma R_n + h_n^\sigma R_m)$, $\Sigma_{mn}^{\sigma\nu} = h\delta_{mn}^{\sigma\nu}$.

Висновки. В роботі вивчено спосіб кінематичного перенормування енергії гравітаційного поля, який полягає в перетвореннях енергії-імпульса гравітаційного поля, а також суперпотенціалу повного комплексу енергії-імпульса гравітуючої систем, пов'язаних зі зміною загальної системи відліку.

Розглянуто два класи узагальнених систем відліку, а саме, голономні та галілеєві системи, і подано основні співвідношення у цих двох окремих випадках.

Подальший розвиток досліджень – реалізація давньої ідеї компенсації додатної нескінченної енергії електромагнітного поля електрона енергією його гравітаційного поля.

ЛІТЕРАТУРА

1. Самохвалов С.Є. Канонічні перетворення в калібрувальних теоріях / Самохвалов С.Є. // Математичне моделювання. – 2015. – №2(33). – С.17-19.
2. Самохвалов С.Є. Теоретико-групове підґрунтя голографічного принципу / Самохвалов С.Є. // Математичне моделювання. – 2010. – №2(23). – С.7-11.
3. Самохвалов С.Є. Загальні системи відліку і визначення енергії в теорії гравітації / Самохвалов С.Є. // Математичне моделювання. – 2016. – №2(35). – С.19-23.

Надійшла до редколегії 11.09.2018.