РОЗДІЛ «ОСВІТА»

УДК 372.851

ДЕРЕЦЬ Є.В., к.фіз.-мат.н., доцент

Дніпродзержинський державний технічний університет

МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ ПРАКТИЧНИХ ВМІНЬ І НАВИЧОК З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ НА ПРИКЛАДІ НАВЧАННЯ ТЕМИ „НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ”

Вступ. Математика є невід’ємною складовою частиною загальної культури сучасного фахівця у будь-якій інженерній галузі. Вивчення математичних дисциплін виховує вміння логічно мислити, аналізувати отримані результати, вибирати найбільш раціональний метод розв’язання не лише математичних, а й професійних інженерних задач. Багато робіт присвячено як загальним проблемам навчання математики в технічному вузі [1-3], так і розгляданню питань вдосконалення методики викладання окремих розділів курсу вищої математики [4, 5].

Постановка задачі. Поняття невизначеного інтеграла є одним із фундаментальних понять математичного аналізу. Формування практичних вмінь і навичок інтегрування у студентів першого курсу є необхідною умовою успішного засвоєння практично всього матеріалу другого семестру. Без належного оволодіння базовим, фундаментальним математичним апаратом неможливе подальше розглядання професійно орієнтованих задач прикладного змісту. Недостатнє оволодіння методами інтегрування студентами зі слабким рівнім підготовки може також призвести до виникнення в них психологічних труднощів і різкого зниження мотивації до навчання.

Оволодіння методами інтегрування – тривалий процес, який потребує від студентів систематичної наполегливої роботи, і завдання викладача – допомогти студентам від розв’язання прикладів „за зразком” з допомогою викладача перейти до виконання завдань, які потребують самостійного творчого мислення, вміння вільно використовувати набуті знання. Мета роботи – розглянути можливі шляхи вдосконалення методики навчання.

Результати роботи. Вироблення навичок інтегрування починається з засвоєння поняття первісної та невизначеного інтеграла і відпрацювання вміння застосовувати таблицю основних інтегралів та розпізнавати табличні інтеграли. Після викладення на лекції таблиці інтегралів доцільно запропонувати студентам у якості завдання до наступного практичного заняття самостійно перевірити табличні формули за допомогою диференціювання, таким чином з самого початку краще осмислюється зв’язок між операціями диференціювання та інтегрування. Звичайно, засвоєння табличних формул потребує обов’язкової перевірки, але контроль при цьому не повинен зводитися до механічного відтворення студентами табличних формул. Для перевірки розуміння поняття первісної та вміння застосовувати табличні інтеграли окрім тестових питань закритого типу, які підібрані таким чином, щоб виявити типові помилки в використанні табличних формул, до кожного варіанту потрібно включати завдання відкритого типу, наприклад

1. Знайти $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3 dx$.

2. Знайти $\int\left(\frac{1}{\cos^2 b}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$, якщо відомо, що $b = const$.

3. Знайти $\int\frac{1}{\sqrt{bx^2+1}}dx$, якщо відомо, що $b = const$.

Такі приклади потребують окрім використання табличних інтегралів застосування формул скороченого множення, операцій з дробами, виконання дій зі степенями та ірраціональними виразами, тощо. Найбільш складним є обчислення невизначених інтегралів, які містять параметр, такі завдання розраховані на студентів з середнім і високим рівнем підготовки. Зазначимо також, що при складанні тестових завдань закритого типу з вибором вірного варіанта бажано уникати неправильного запису табличних інтегралів на зразок $\frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a}+C$, оскільки запис такого виду може мимоволі запам'ятатися студентом як вірний.

Успішному засвоєнню подальших тем сприяє викладання в лекційному курсі чіткого алгоритму розв'язання того чи іншого типу прикладів, наприклад, при вивченні інтегрування раціональних дробів алгоритм розв'язання може бути викладений наступним чином.

Для того, щоб знайти інтеграл від раціонального дробу $\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ потрібно:

1. Перевірити, правильним чи неправильним є дріб. Якщо дріб є неправильним, треба розкласти його на суму многочлена і правильного дробу, розділивши чисельник на знаменник з остачею.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \underbrace{\{\text{результат ділення}\}}_{\text{многочлен}} + \underbrace{\frac{\{\text{остача}\}}{P(x)}}_{\text{правильний дріб}}.$$

2. Розкласти знаменник на лінійні множники виду $(x-a)$ та множники виду (x^2+px+q), $p^2-4q<0$.

3. Представити правильний раціональний дріб як суму елементарних раціональних дробів.

4. Обчислити $\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ як суму інтегралів.

Далі розглядається використання загального алгоритму на прикладі інтеграла $\int \frac{x^4-x^3+x^2-2x+7}{(x^2+3)(x-1)}dx$.

На лекційному занятті студентам у якості завдання до наступного практичного заняття пропонується спробувати проаналізувати (не проводячи повне розв'язання), яким чином використовується цей алгоритм для кількох конкретних інтегралів. При цьому приклади підбираються так, щоб у деяких з них не потрібно було реалізовувати всі кроки загального алгоритму, тобто не потрібно ділити на многочлен, або не потрібно розкладати на суму дробів тощо. Надалі під час практичного заняття в процесі спільного обговорення проводиться аналіз особливостей запропонованих задач та повне розв'язання прикладів на зразок наступних.

1. Знайти $\int \frac{x+3}{x^2(x+1)}dx$ – студенти повинні самостійно зробити висновок, що множник x^2 є виразом виду $(x-a)^2$, в якому $a=0$.

2. Знайти $\int \frac{x^2+1}{x+4}dx$ – потрібно звернути увагу студентів на те, що у такому прикладі не використовується метод невизначених коефіцієнтів, потрібне лише ділення з остачею.

3. $\int \frac{2x^4+4x^2+x^3+x-48}{(x+2)(x^2+6)}dx$ – студентам пропонується самостійно провести всі етапи розв'язання за зразком, наведеним в лекційному курсі, при цьому викладач активно співпрацює з кожним студентом, відповідає на можливі питання і перевіряє поточні перетворення.

Крім того, для виховання вміння не тільки наслідувати загальному алгоритму, а й відходити від нього, шукаючи більш раціональний шлях розв'язання задачі, наприкінці теми студентам пропонується самостійно або в невеликих групах обговорити метод знаходження декількох інтегралів. Завдання підбирається так, щоб існував шлях розв'язання коротший, ніж стандартний алгоритм, або потрібно було робити вибір між декількома методами, обираючи більш раціональний. Наприклад, після вивчення інтегрування раціонального дробу за допомогою розкладання правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів, можна запропонувати розглянути інтеграл $\int \frac{x^4+10x^2+7x+25}{(x^2+5)^3}dx$, до якого замість стандартного розкладання

$$\frac{x^4+10x^2+7x+25}{(x^2+5)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+5}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+5\right)^2}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+5\right)^3}$$

можна застосувати перетворення

$$\frac{x^4+10x^2+7x+25}{(x^2+5)^3}=\frac{x^4+10x^2+25+7x}{(x^2+5)^3}=\frac{\left(x^2+5\right)^2+7x}{(x^2+5)^3}=\frac{1}{x^2+5}+\frac{7x}{(x^2+5)^3},$$

яке дозволяє уникнути розв'язання системи з 6 невідомими і значно спрощує інтегрування.

Кращому засвоєнню багатьох методів інтегрування сприяє систематизація матеріалу у вигляді таблиць. Нижче наведено приклад викладення методів знаходження інтеграла виду $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ у вигляді таблиці.

Знаходження інтеграла виду $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

№ п/п	Вид інтеграла	Метод інтегрування
1.	$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ n – будь-яке дійсне число.	$t=\cos x$, $dt=(\cos x)' dx=-\sin x\, dx$, $\sin^{2k+1} x\, dx=\sin^{2k} x \sin x\, dx=$ $=\left(\sin^2 x\right)^k \sin x\, dx=\left(1-\cos^2 x\right)^k \sin x\, dx=$ $=\left(1-t^2\right)^k(-dt)$.
2.	$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx$ $k = 0, 1, 2, \ldots$ m – будь-яке дійсне число.	$t=\sin x$, $dt=(\sin x)' dx=\cos x\, dx$, $\cos^{2k+1} x\, dx=\cos^{2k} x \cos x\, dx=$ $=\left(\cos^2 x\right)^k \cos x\, dx=\left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x\, dx=$ $=\left(1-t^2\right)^k dt$.

3.	$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ $m+n=-2k$, k = 1, 2, … (числа *m*, *n* не обов'язково є цілими).	Використовується одна з двох замін $t=tgx$, $x=\text{arctg}t$, $dx=(arctgt)'dt=\frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. $t=ctgx$, $x=\text{arcctg}t$, $dx=(arcctgt)'dt=-\frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Для більшості прикладів якщо $m>0$, то простішою є заміна $t=tg\,x$, а якщо $n>0$, то кращою є заміна $t=ctg\,x$.
4.	$\int \frac{\sin^n x}{\cos^n x}dx$ *n* – будь-яке дійсне число.	$\int \frac{\sin^n x}{\cos^n x}dx=\int (tgx)^n dx$, $t=tg\,x$, $x=arctg\,t$, $dx=(arctg\,t)'dt=\frac{dt}{1+t^2}$.
5.	$\int \frac{\cos^n x}{\sin^n x}dx$ *n* – будь-яке дійсне число	$\int \frac{\cos^n x}{\sin^n x}dx=\int (ctg\,x)^n dx$, $t=ctg\,x$, $x=arcctg\,t$, $dx=(arcctg\,t)'dt=-\frac{dt}{1+t^2}$.
6.	$\int \sin^{2k} x\,dx$, $\int \cos^{2k} x\,dx$, $\int \sin^{2k} x \cos^{2k} x\,dx$, k = 1, 2, 3, …	Використовуються формули зниження степеня $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, а також формула $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$. Далі до одержаного виразу треба підібрати метод інтегрування.

Кожен пункт таблиці необхідно проілюструвати відповідним прикладом.

Вивчення методів інтегрування тригонометричних функцій корисно супроводжувати прикладами, які потребують вибору між декількома можливими підходами до розв'язання, на зразок $\int \sin^{21} x\cos^5 xdx$ (студенти повинні самостійно зробити висновок, що заміна $t=\sin x$ є більш раціональною, ніж $t=\cos x$, і узагальнити цей результат для інтегралів виду $\int \sin^{2k+1} x\cos^{2m+1} xdx$), $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x}dx$ (аналізуючи цей приклад, студенти повинні зробити висновок, що інтеграл задовольняє умовам п. 2 таблиці, тому що 3 – додатне непарне число (відповідна заміна $t=\sin x$), а також п. 3 таблиці, оскільки 3 + (–9) = – 6 – парне від'ємне число (відповідна заміна $t=\text{ctg}\,x$), крім того, можлива заміна $t=\text{tg}\frac{x}{2}$ (універсальна тригонометрична підстановка) і $t=\text{tg}\,x$ (один з окремих випадків), при цьому найбільш раціональною, як показує перевірка, є заміна $t=\sin x$). Вибір найбільш оптимального метода інтегрування проводиться під час діалогу з аудиторією, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу та підвищенню пізнавального інтересу.

Така методика викладання потребує тісної співпраці між викладачами, які ведуть практичні і лекційні заняття, і дозволяє своєчасно вносити корективи в лекційний курс і самостійну роботу студентів в залежності від труднощів, які виникають на практичних заняттях.

Під час практичних занять вивчення кожної теми повинне завершуватись самостійним розв'язанням типових прикладів. Кожне завдання для самостійної роботи має містити як прості типові завдання, які можуть бути розв'язані студентами зі слабким рівнем підготовки на основі розглянутих раніше аналогічних завдань, так і приклади, в яких необхідно провести додаткову заміну змінної, вибрати найбільш раціональний з можливих методів тощо. До аудиторних самостійних робіт корисно також включати завдання, у яких студенти повинні вибрати серед декількох інтегралів інтеграл вказаного типу. При цьому проведення контролюючих заходів потребує ретельної методичної підготовки, яка полягає у складанні достатньої кількості рівних за складністю різних варіантів завдань. Успішне виконання самостійних робіт за всіма методами інтегрування (можливо, після декількох перездач і додаткових консультацій) є необхідною умовою складання іспиту, таким чином, забезпечується підвищення рівня залишкових знань і відсутність прогалин в засвоєнні матеріалу. Для реалізації такого методичного підходу створена достатня кількість завдань, при цьому завдання для самостійного виконання за межами аудиторії є виключно індивідуальними і мають відповіді.

Як додаткове завдання для самостійної роботи студентам також пропонується спробувати розв'язати частину прикладів за допомогою програми MathCad, з якою вони ознайомлені в ході вивчення інших дисциплін, а потім порівняти одержані результати з відповідями, отриманими аналітично. При цьому завдання підбираються таким чином, щоб студенти мають змогу самостійно зробити висновок, що для деяких інтегралів аналітичний метод розв'язання має переваги у порівнянні з результатом роботи прикладної програми. Наприклад, в результаті заміни змінної одержуємо

$$\int \frac{x^2+\sin x}{x^3-3\cos x}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-3\cos x\right| + C,$$

тоді як відповідь, одержана з використанням програм MathCad або Maple має вигляд

$$-\frac{1}{3}\ln\left(1+\mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{3}\ln\left(\mathrm{x}^3+x^3\mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)^2-3+3\mathrm{tg}\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)^2\right)+C.$$

Висновки. У роботі розглянуто питання вдосконалення методики формування практичних вмінь і навичок інтегрування у студентів технічних спеціальностей. Зокрема, наведено приклади систематизації матеріалу у вигляді таблиць, опису алгоритмів інтегрування, наведено приклади завдань для діагностичного тестування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Крилова Т.В. Проблеми навчання математики в технічному вузі: моногр. / Т.В.Крилова. – К.: Вища шк., 1998. – 438с.
2. Крилова Т.В. Концепція математичної підготовки студентів нематематичних спеціальностей вищої технічної школи / Т.В.Крилова // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк: Фірма ТЕАН. – 2006. – Вип. 25. – С.2005-2008.
3. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: монография / Е.И.Скафа. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439с.
4. Білоцький М.М. Про означення похідної за напрямом у курсі математичного аналізу / М.М.Білоцький, І.Я.Субботін, П.П.Баришовець // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк: ДонНУ. – 2008. – Вип. 29. – С.57-64.

5. Вишенська О.В. Діагностично-коригуюче тестування при вивченні фундаментальних понять аналізу // О.В.Вишенська, Ю.А.Мейш // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – Дніпродзержинськ. – 2013. – Вип. 2 (22). – С.168-172.

Надійшла до редколегії 29.06.2016.

УДК 378.147
ДЕРЕЦЬ Є.В., к.ф.-м.н., доцент

Дніпродзержинський державний технічний університет

ШЛЯХИ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ВИЩОЇ ТЕХНІЧНОЇ ШКОЛИ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Вступ. Постійно зростаючий ступінь інтеграції та глобалізації сучасного суспільства, перспектива входження України у європейський простір виводить проблему підвищення якості освіти на принципово новий рівень. В Законі України про освіту „сприяння сталому розвитку суспільства шляхом підготовки конкурентоспроможного людського капіталу та створення умов для освіти протягом життя” визначається як один із принципів державної політики у сфері вищої освіти [1, с.3]. Головним завданням викладача є формування у студентів внутрішньої потреби до саморозвитку та самовдосконалення. Науково-педагогічні працівники зобов’язані „розвивати в осіб, які навчаються у вищих навчальних закладах, самостійність, ініціативу, творчі здібності” [1, с.58]. Відповідно до нової освітньої парадигми підвищуються вимоги до якості самостійної роботи студентів (СРС). Формування навичок самоосвіти під час вивчення курсу вищої математики студентами інженерних спеціальностей набуває актуальності ще й у зв’язку з тим, що на сучасному етапі розвитку науки і техніки зростає роль математичних методів та інформаційних технологій у інженерних розрахунках. Для сучасного висококваліфікованого інженера недостатньо володіти основними математичними методами на рівні обчислень „на папері” за відомими стандартними алгоритмами, потрібне розвинуте абстрактно-логічне мислення, просторова уява, вміння грамотно скласти математичну модель, проаналізувати отримані дані, застосувати прикладні математичні пакети тощо.

Постановка задачі. Проблема організації самостійної роботи студентів відображена у багатьох працях як вітчизняних, так і зарубіжних учених: А.Алексюка, А.Артемова, С.Архангельского, Ю.Бабанського, І.Баріхашвілі, В.Бенера, В.Делингера, П.Підкасистого, А.Петровського, Г.Саранцева, М.Солдатенко, V.Harvey, E.Henderson та інших. У роботах З.Слєпкань, М.Жалдака, О.Скафи розглядаються методичні основи формування самостійної навчальної діяльності при вивченні математичних дисциплін. У працях Т.Крилової, Л.Нічуговської, В.Петрук досліджується професійна спрямованість математичної підготовки, у тому числі важливість розв’язання задач спеціального змісту в ході самостійної роботи студентів.

Разом з тим питання вдосконалення організації самостійної навчальної діяльності студентів, пошук шляхів підвищення ефективності СРС є проблемами, які потребують подальшого педагогічного дослідження. На сучасному етапі реформування вищої освіти в умовах скорочення кількості аудиторних годин і зростання частки самостійної роботи в загальному розподілу часу проблема дослідження шляхів вдосконалення якості самостійної навчальної роботи студентів під час вивчення вищої і прикладної математики набуває особливого значення. Математика є інструментом наукових досліджень фізики, хімії та інших дисциплін і якість загальної математичної підготовки бакалаврів є необхідною умовою успішного вивчення спеціальних курсів.

Метою даної роботи є аналіз шляхів підвищення ефективності самостійної роботи