

РОЗДІЛ «ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА. ЕЛЕКТРОТЕХНІКА»

УДК 62-83

ДЕРЕЦ А.Л., к.т.н., доцент
САДОВОЙ А.В., д.т.н., професор

Днепродзержинський державний технічний університет

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА, ОПТИМИЗИРОВАННОЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ МЕТОДОМ N-І ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ ДЛЯ ОТРАБОТКИ РЕЖИМА «БОЛЬШОГО ТРЕУГОЛЬНИКА»

Введение. Релейная система подчинённого регулирования (СПР) является наиболее простым техническим решением задачи ограничения координат объекта управления в переходных процессах. Метод N-і переключений [1] позволяет оптимизировать такие системы по быстродействию. Он обеспечивает синтез регуляторов с линейными функциями переключения, реализующих нелинейную фазовую траекторию за счёт перераспределения между ними функции поддержания скользящего режима на различных стадиях переходного процесса. Предпосылкой к устойчивости синтезируемых систем является сходимость их динамических траекторий, на прогнозировании которых основан расчёт параметров регуляторов. Однако в явном виде методика придания устойчивости в математическом аппарате данного метода отсутствует, что придаёт актуальность задаче исследования свойств оптимизируемых с его применением систем в статических и динамических режимах.

Постановка задачи. Для СПР четвёртого порядка, настроенной на оптимизацию по быстродействию режима «трапеции», которому присуща траектория наиболее общей формы, исследование переходных режимов и оценка устойчивости выполнены в работах [2-4] на примере системы регулирования скорости электропривода с упругой связью. В режиме большого треугольника система движется по специфической траектории, для которой максимум первой производной ошибки регулирования не предопределён и является функцией скачка задающего воздействия. Для реализации такой траектории системой подчинённого регулирования требуется некоторое изменение порядка переключения регуляторов [5] по отношению к очерёдности их работы, устанавливаемой методом N-і переключений для режима «трапеции». Данное обстоятельство не позволяет распространить результаты работ [2, 3] на СПР, настроенную на режим «большого треугольника», и требует выполнения для такой системы отдельных исследований переходных процессов и анализа устойчивости скользящих режимов.

Результаты работы. Система дифференциальных уравнений невозмущённого движения двухмассовой электромеханической системы имеет вид

$$\left. \begin{aligned} p\Omega &= \frac{M_y}{J} = \frac{C_{ж}(k_p\varphi_{дв} - \varphi_{ив})}{J}; \\ pM_y &= C_{ж}(k_p\omega_{дв} - \Omega); \\ p\omega_{дв} &= \frac{M_{дв} - k_p M_y}{J_{дв}} \\ pM_{дв} &= c \cdot \frac{u - R \cdot M_{дв}/c - c \cdot \omega_{дв}}{L} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где $\varphi_{ив}$, $\varphi_{дв}$, Ω , $\omega_{дв}$, M_y , $M_{дв}$ – соответственно угловые положения и скорости исполнительного вала и вала двигателя, упругий момент и момент двигателя;

$k_p \Phi_{\text{дв}} - \Phi_{\text{ив}} = \Delta\varphi$ – угол закручивания упругого элемента; u – напряжение преобразователя; $k_p, R, L, J, J_{\text{дв}}, C_{\text{ж}}, c = k\Phi$ – параметры электромеханической системы; $p = d/dt$.

Величины первой и второй производных скорости исполнительного вала Ω линейно связаны с углом и скоростью закручивания упругого элемента соответственно. Аналогичным образом третья и четвертая производные регулируемой координаты связаны с величинами угловых ускорения и рывка исполнительного вала в системе координат, привязанной к валу двигателя. На этом основании в ряде работ, в частности [2, 3], для производных выходной величины Ω введены символы $\varphi, \omega, \varepsilon, a$, принятые для координат позиционного привода. Это позволяет обозначить вектор канонических координат как

$$(\Omega, p\Omega, p^2\Omega, p^3\Omega, p^4\Omega) = (\varphi, \omega, \varepsilon, a). \quad (2)$$

В таких обозначениях математическое описание каскада регуляторов релейной СПР скорости электропривода с упругим передаточным устройством имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u_{R1} &= u_{R\Omega} = \varphi^* = \\ &= -\varphi_{\max} \cdot \text{sign}(\Omega - \Omega^* + K_{\Omega\varphi} \cdot \varphi + K_{\Omega\omega} \cdot \omega + K_{\Omega\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R2} &= u_{R\varphi} = \omega^* = -\omega_{\max} \cdot \text{sign}(\varphi - \varphi^* + K_{\varphi\omega} \cdot \omega + K_{\varphi\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R3} &= u_{R\omega} = \varepsilon^* = -\varepsilon_{\max} \cdot \text{sign}(\omega - \omega^* + K_{\omega\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R4} &= u_{R\varepsilon} = u = -U_{\max} \cdot \text{sign}(\varepsilon - \varepsilon^*) \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где u_{Ri} – сигнал i -го (считая от входа) регулятора; символом «*» отмечены заданные значения координат, как входное, так и формируемые регуляторами; индексами « \max » отмечены уровни ограничений канонических координат.

Параметрический синтез регуляторов $R_\varphi, R_\omega, R_\varepsilon$ внутренних контуров данной системы подчинённого регулирования выполнен в работе [2], а аналитическое исследование их устойчивости – в работе [3] в системе обозначений (2), что обеспечивает преемственность результатов синтеза коэффициентов $K_{\varphi\omega}, K_{\varphi\varepsilon}, K_{\omega\varepsilon}$ при оптимизации по быстродействию систем более высоких порядков:

$$K_{\omega\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\max}}{2 \cdot a_{\max}}, \quad K_{\varphi\omega} = \frac{\omega_{\max}}{2 \cdot \varepsilon_{\max}} + \frac{\varepsilon_{\max}}{2 \cdot a_{\max}}, \quad K_{\varphi\varepsilon} = \frac{\omega_{\max}}{4 \cdot a_{\max}} + \frac{\varepsilon_{\max}^2}{12 \cdot a_{\max}^2}. \quad (4)$$

В работе [5] методом N-i переключений получены настройки регулятора R_Ω из каскада (3). Выражения для коэффициентов обратных связей имеют вид

$$K_{\Omega\varphi} = 3T_{sa} + 2T_{se} + \frac{1}{2}T_{so}, \quad K_{\Omega\omega} = \frac{29}{12}T_{sa}^2 + \frac{35}{12}T_{sa} \cdot T_{se} + \frac{5}{6}T_{se}^2 + \frac{1}{2}T_{sa} \cdot T_{so} + \frac{1}{4}T_{se} \cdot T_{so},$$

$$K_{\Omega\varepsilon} = \frac{3}{4}T_{sa}^3 + \frac{9}{8}T_{sa}^2 \cdot T_{se} + \frac{5}{12}T_{sa} \cdot T_{se}^2 + \frac{1}{6}T_{sa}^2 \cdot T_{so} + \frac{1}{8}T_{sa} \cdot T_{se} \cdot T_{so}, \quad (5)$$

где T_{sa}, T_{se}, T_{so} – расчётные интервалы стабилизации координат a, ε, ω , определенные в [2] через максимумы старших производных регулируемой координаты.

В режиме «большого треугольника» [5] длительность интервала T_{so} варьируется согласно выражению

$$T_{s\omega} = \frac{\varphi_{max} - \varphi_{pt}}{\omega_{max}}, \quad (6)$$

в зависимости от значения φ_{max} , достигаемого на расчётной оптимальной по быстродействию траектории при отработке скачка задающего воздействия Ω^* и определяемого по формуле

$$\varphi_{max} = \sqrt{\left(\frac{\omega_{max}^2}{2 \cdot \varepsilon_{max}}\right)^2 + \Omega^* \cdot \omega_{max} + \varphi_{pt} - \omega_{max} \left(\frac{3 \cdot \omega_{max}}{2 \cdot \varepsilon_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}}{a_{max}}\right)}, \quad (7)$$

где $\varphi_{pt} = a_{max} \left(\frac{47}{24} T_{sa}^3 + 3 T_{sa}^2 \cdot T_{se} + T_{sa} \cdot T_{se}^2 \right)$ – суммарный угол закручивания интервалов разгона и торможения, введённый для компактности аналитических выкладок.

Величина φ_{max} , рассчитываемая по формуле (7), определяет также текущий уровень ограничения сигнала регулятора R_1 , соответствующий заданному значению Ω^* . В целом выражения (4)-(7) обеспечивают настройку каскада регуляторов (3) на формирование оптимального по быстродействию переходного процесса отработки Ω^* в режиме «большого треугольника».

Представим коэффициенты (4) явными функциями введённых в работе [3] постоянных времени замкнутой системы

$$T_a = \frac{\varepsilon_{max}}{a_{max}}, \quad T_\varepsilon = \frac{\omega_{max}}{\varepsilon_{max}}, \quad T_\omega = \frac{\varphi_{max}}{\omega_{max}}. \quad (8)$$

Постоянные времени (8) по определению являются положительными независимо от настроек системы на реализацию той или иной формы переходной траектории. Данное обстоятельство способствует упрощению анализа устойчивости скользящих режимов регуляторов каскада (3), позволяя выразить коэффициенты их характеристических уравнений через безусловно положительные величины. Так, результаты работы [3], касающиеся устойчивости контуров регулирования координат ω, φ , могут быть обоснованы подстановкой выражений (8) в формулы (4), результаты которой приведём, опустив промежуточные выкладки:

$$K_{\omega\varepsilon} = \frac{1}{2} T_a, \quad K_{\varphi\omega} = \frac{1}{2} (T_\varepsilon + T_a), \quad K_{\varphi\varepsilon} = \frac{1}{4} T_a \cdot T_\varepsilon + \frac{1}{12} T_a^2. \quad (9)$$

Вид выражений (9) свидетельствует о положительности коэффициентов уравнений

$$K_{\omega\varepsilon} \cdot p + 1 = 0, \quad K_{\varphi\omega} \cdot p^2 + K_{\varphi\varepsilon} \cdot p + 1 = 0,$$

характеризующих скользящие режимы регуляторов R_ω, R_φ каскада (3), что является необходимым и достаточным условием устойчивости систем первого и второго порядков.

Регулятор R_Ω образует с объектом управления (1) систему четвертого порядка. Однако с учетом понижения на единицу порядка линеаризованной системы в скользящем режиме проверка устойчивости её внешнего контура сводится к анализу характеристического уравнения третьего порядка вида

$$K_{\Omega\varphi} \cdot p^3 + K_{\Omega\omega} \cdot p^2 + K_{\Omega\varepsilon} \cdot p + 1 = 0. \quad (10)$$

Взаимосвязь корней кубического уравнения (10) с его коэффициентами, устанавливаемая формулами Кардано, в сочетании с громоздкими выражениями самих коэффициентов (5) является весьма сложной, что делает неоправданно трудоемкой оценку устойчивости данной системы путём определения корней уравнения (10). Поэтому проверку устойчивости скользящего режима контура регулирования, построенного на основе R_Q , целесообразно выполнить с помощью косвенного алгебраического критерия Рауса-Гурвица. Для этого выразим коэффициенты (5) уравнения (10) через постоянные времени замкнутой системы (8).

Определённые в работе [2] формулы для интервалов T_{sa} , T_{se} с учётом выражений постоянных времени (8) принимают вид

$$T_{sa} = T_a, \quad T_{se} = T_\varepsilon - T_a. \quad (11)$$

Выражение интервала стабилизации второй производной регулируемой координаты $T_{sw} = T_\omega - T_\varepsilon - T_a$, справедливое для рассматриваемого в [2] режима «трапеции», должно быть переопределено для режима «большого треугольника» с учётом выведенных для данного режима в работе [5] выражений максимумов координат $\varphi(t)$, $\omega(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{max} &= a_{max} \left(\frac{47}{24} T_{sa}^3 + 3T_{sa}^2 \cdot T_{se} + T_{sa} \cdot T_{se}^2 + T_{sa}^2 \cdot T_{sw} + T_{sa} \cdot T_{se} \cdot T_{sw} \right), \\ \omega_{max} &= a_{max} \left(T_{sa}^2 + T_{sa} \cdot T_{se} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим в формулу T_ω из (8) выражения (12)

$$\begin{aligned} T_\omega &= \frac{\varphi_{max}}{\omega_{max}} = \frac{a_{max} \left(\frac{47}{24} T_{sa}^3 + 3T_{sa}^2 \cdot T_{se} + T_{sa} \cdot T_{se}^2 + T_{sa}^2 \cdot T_{sw} + T_{sa} \cdot T_{se} \cdot T_{sw} \right)}{a_{max} \left(T_{sa}^2 + T_{sa} \cdot T_{se} \right)} = \\ &= T_{sw} + T_{se} + 2 \cdot T_{sa} - \frac{T_{sa}^3}{24 \left(T_{sa}^2 + T_{sa} \cdot T_{se} \right)}, \end{aligned}$$

и с учётом (11) разрешим полученное уравнение относительно T_{sw}

$$T_{sw} = T_\omega - T_\varepsilon - T_a + \frac{1}{24} \frac{T_a^2}{T_\varepsilon}. \quad (13)$$

Опустив промежуточные выкладки, приведём результаты подстановки выражений (11), (13) в формулы (5):

$$\begin{aligned} K_{\Omega\varphi} &= \frac{1}{2} \left(T_a + 3 \cdot T_\varepsilon + T_{sw} + \frac{1}{24} \frac{T_a^2}{T_\varepsilon} \right), \\ K_{\Omega\omega} &= \frac{7}{12} T_\varepsilon^2 + \frac{9}{12} T_a \cdot T_\varepsilon + \frac{3}{32} T_a^2 + \frac{1}{4} T_a \cdot T_\omega + \frac{1}{4} T_\varepsilon \cdot T_\omega + \frac{1}{96} \frac{T_a^3}{T_\varepsilon}, \\ K_{\Omega\varepsilon} &= \frac{1}{192} T_a^3 + \frac{7}{24} T_a \cdot T_\varepsilon^2 + \frac{1}{24} T_a^2 \cdot T_\omega + \frac{1}{8} T_a^2 \cdot T_\varepsilon + \frac{1}{8} T_a \cdot T_\varepsilon \cdot T_\omega + \frac{1}{576} \frac{T_a^4}{T_\varepsilon}. \end{aligned} \quad (14)$$

Составим для уравнения (10) систему неравенств с использованием определителя Гурвица и его диагональных миноров согласно [6]:

$$\begin{vmatrix} K_{\Omega\omega} & 1 & 0 \\ K_{\Omega\varepsilon} & K_{\Omega\varphi} & 0 \\ 0 & K_{\Omega\omega} & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} K_{\Omega\omega} & 1 \\ K_{\Omega\varepsilon} & K_{\Omega\varphi} \end{vmatrix} > 0; \quad K_{\Omega\omega} > 0. \quad (15)$$

Положительные значения коэффициентов $K_{\Omega\varphi}, K_{\Omega\omega}, K_{\Omega\varepsilon}$ вытекают из вида выражений (14). Условие устойчивости (15) сводится к следующему неравенству:

$$K_{\Omega\omega}K_{\Omega\varphi} - K_{\Omega\varepsilon} > 0. \quad (16)$$

Подстановка в неравенство (16) коэффициентов (14), представленных явными функциями положительных постоянных времени $T_a, T_\varepsilon, T_\omega$, позволяет свести данное неравенство к виду

$$\frac{7}{96}T_a^3 + \frac{29}{72}T_a^2 \cdot T_\varepsilon + \frac{7}{8}T_\varepsilon^3 + \frac{9}{8}T_a \cdot T_\varepsilon^2 + T_\omega \left(\frac{13}{96}T_a^2 + \frac{3}{4}T_a \cdot T_\varepsilon + \frac{2}{3}T_\varepsilon^2 + \frac{1}{96}\frac{T_a^3}{T_\varepsilon} \right) + \frac{1}{8}T_\omega^2(T_a + T_\varepsilon) + \frac{25 \cdot T_a^4}{4608 \cdot T_\varepsilon} + \frac{T_a^5}{4608 \cdot T_\varepsilon^2} > 0,$$

который однозначно свидетельствует об устойчивости скользящего режима R_Ω , возникающего после отработки режима «большого треугольника».

Заметим, что представление коэффициентов обратных связей в виде функций постоянных времени замкнутой системы (8) не придаёт выражениям (14) более компактную форму по сравнению с выражениями (5). Следовательно, с точки зрения анализа устойчивости системы данная мера облегчает применение критерия Рауса-Гурвица, но не способствует определению корней характеристического уравнения (10).

Вместе с тем, использование постоянных времени (8) позволяет развить отдельные результаты работы [5]. Так, подстановка равенств (8), (11), (13) в выражение (7) упрощает расчётную формулу максимума первой производной регулируемой координаты. Опустим промежуточные выкладки и приведём результат такой подстановки

$$\Phi_{\max} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\omega_{\max} \cdot T_\varepsilon\right)^2 + \Omega^* \cdot \omega_{\max}} - \frac{1}{2}\omega_{\max} \cdot T_\varepsilon - \frac{1}{24}a_{\max} \cdot T_a^3, \quad (17)$$

отметив, что выражение (17) допускает сокращение длительности перенастройки системы в реальном времени.

Кроме того, использование постоянных времени (8) заметно упрощает определение границ диапазона реализуемости данной формы траектории

$$[\Omega^*_{\min \Delta}, \Omega^*_{\max \Delta}), \quad (18)$$

алгоритм которого был приведён в работе [5] без представления конечных результатов. Подстановка выражений (11), (13) вместе с граничным условием реализации режима «большого треугольника» $T_{S\omega}=0$ в выражение Ω^* , определённое в работе [5] через интервалы стабилизации канонических координат, позволяет получить расчётную

формулу нижней границы диапазона (18) в виде функции уровней ограничения канонических координат и постоянных времени

$$\Omega^* \min \Delta = \omega_{\max} \left(T_a^2 + 3 \cdot T_a \cdot T_\varepsilon + 2 \cdot T_\varepsilon^2 \right). \quad (19)$$

Подстановка выражений (11), (13) вместе с граничным условием реализации режима «трапеции» $T_{S\varphi} = 0$ в выражение Ω^* , определённое в работе [2] через интервалы стабилизации канонических координат, позволяет получить расчётную формулу верхней границы диапазона (18) в виде функции уровней ограничения канонических координат и постоянных времени

$$\Omega^* \max \Delta = \varphi_{\max} (T_a + T_\varepsilon + T_\omega). \quad (20)$$

Заметим, что при вычислении по формуле (20) используется не текущее значение величины φ_{\max} , получаемое согласно (17), а максимальный предустановленный уровень ограничения первой производной регулируемой координаты $\varphi_{\max} = \varphi^*_{\max}$.

На рис.1 представлен результат моделирования переходного процесса в системе управления нейтрально-устойчивым объектом четвёртого порядка с настройкой каскада регуляторов (3) по формулам (4)-(7) для случая $\Omega^* = 0,01$ и предустановленных максимумов $\omega_{\max} = 0,7$, $\varepsilon_{\max} = 20$, $a_{\max} = 1000$ при незаданным φ_{\max} . Данные значения подобраны из соображений придания наглядности временным диаграммам, а указанные на графиках множители при $\omega(t)$, $\Omega(t)$ служат для согласования визуальных масштабов графиков, построенных на общем поле. Сигналы регуляторов показаны в относительных единицах с кратными масштабами, визуально уменьшающими амплитуду сигнала по мере подчиненности регулятора. Соответствие диаграмм переходных процессов, приведенных на рис.1, их расчётному виду, принятому в статье [5], наряду с устойчивым функционированием регуляторов в скользящем режиме свидетельствует о корректности аналитических результатов данной работы.

Подчеркнём особенность функционирования каскада регуляторов (3) в представленном на рис.1 переходном процессе. Диаграммы управляющих сигналов демонстрируют отсутствие собственных переключений R_φ не только в скользящем режиме, что обусловлено нулевым интервалом стабилизации $\varphi(t)$ при отработке «большого треугольника», но и на этапе единичных переключений, что продиктовано специфическим выбором характерных точек вышеупомянутого в иерархии управления регулятора СПР, оговоренным в статье [5]. Роль R_φ в оптимальном по быстродействию переходном процессе сводится только к изменению масштаба сигнала R_Ω с φ_{\max} на ω_{\max} в

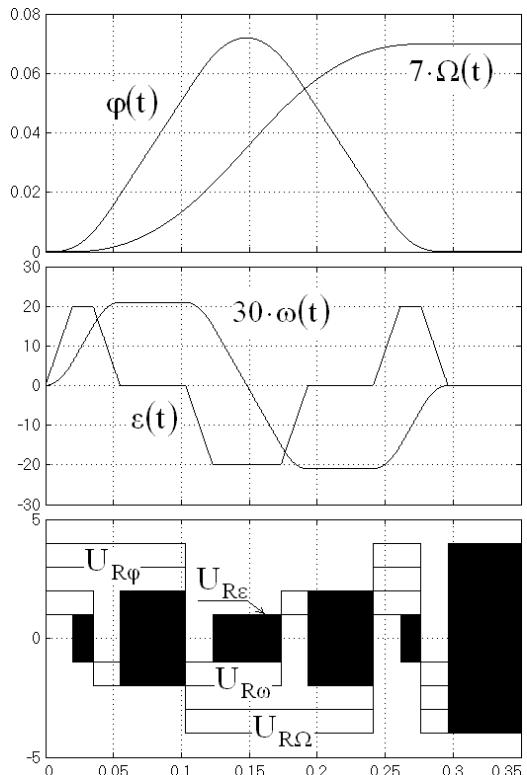


Рисунок 1 – Переходные процессы в синтезированной системе

соответствии с уравнениями (3). Во избежание непродуктивного использования мощности контроллера при отработке «большого треугольника» алгоритм регулятора R_φ может быть исключён из общего алгоритма управления СПР, описываемого системой уравнений (3).

Необходимо упомянуть, что настоящая работа, как и лежащие в её основе статьи [2]-[5], посвящены формированию релейными СПР переходных траекторий, методику расчёта которых можно считать общеизвестной. Элемент новизны представляемых результатов состоит в интеграции таких траекторий в математический аппарат метода N-i переключений [1], который обеспечивает оптимизацию замкнутой системы управления по быстродействию без явного расчёта временных диаграмм.

Выводы. Доказательство устойчивости скользящих режимов регуляторов релейной СПР четвёртого порядка, синтезированной в работе [5], позволяет исключить из процедуры самонастройки системы оптимального управления на режим «большого треугольника» какие-либо операции, связанные с проверкой устойчивости в реальном времени, что способствует рациональному использованию вычислительных ресурсов контроллера. Выполненное в контексте анализа устойчивости переопределение ключевых результатов работы [5] как функций постоянных времени замкнутой системы даёт возможность сформулировать алгоритм настройки каскада регуляторов (3) на рассматриваемый режим в виде последовательности формул (17), (14) с предварительным расчётом по формулам (8), (9), (19), (20) и проверкой принадлежности Ω^* диапазону (18). Представленные исследования выполнены для коэффициентов обратных связей, относящихся к каноническим координатам, что допускает распространение результатов данной работы на все синтезированные методом N-i переключений системы четвёртого порядка, замкнутые по старшим производным выходной величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Релейные системы оптимального управления электроприводами / Садовой А.В., Сухинин Б.В., Сохина Ю.В., Дерец А.Л. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2011. – 337с.
2. Садовой А.В. Параметрический синтез релейной системы подчинённого регулирования скорости электропривода с упругой связью / Садовой А.В., Дерец А.Л. // Вестник КГПУ. – Кременчуг: КГПУ. – 2008. – Выпуск 3/2008(50). – Часть 1. – С.83-87.
3. Садовой А.В. Анализ устойчивости скользящего режима оптимальной по быстродействию системы четвертого порядка / Садовой А.В., Дерец А.Л. // Вестник НТУ ХПИ. Серия «Электротехника, электроника и электропривод». – Харьков. – 2008. – Выпуск 30. – С.91-93.
4. Садовой А.В. Анализ характера скользящего режима оптимальной по быстродействию позиционной релейной СУЭП / Садовой А.В., Дерец А.Л. // Сборник научных трудов Днепродзержинского государственного технического университета (технические науки). – Днепродзержинск: ДГТУ. – 2008. – Выпуск 8. – С.140-144.
5. Дерец А.Л. Оптимизация по быстродействию режима «большого треугольника» релейной системы четвёртого порядка методом N-i переключений / Дерец А.Л., Садовой А.В. // Вестник НТУ ХПИ. Серия «Силовая электроника и энергоэффективность». – Харьков. – 2015. – Выпуск 12 (1121). – С.96-100.
6. Юревич Е.И. Теория автоматического управления / Юревич Е.И. – Л.: «Энергия», 1969. – 375с.: ил.

Поступила в редакцию 11.10.2016.