

3. Новиков В.С. Гомогенизация и диспергирование в современной технологии / Новиков В.С. // Пром. теплотехника. – 1990. – Т.12. – №5. – С.40-59.
4. Павленко А.М. Энергетические характеристики вихревого аппарата / А.М.Павленко, О.А.Крюковская // Системные технологии: региональный межвузовский сборник научных трудов. – Днепропетровск. – 2005. – Выпуск 4 (39). – С.84-89.

Надійшла до редколегії 18.01.2016.

УДК 536.21

ГОРБУНОВ А.Д., д.т.н., профессор
УКЛЕИНА С.В., аспирант

Днепродзержинский государственный технический университет

К РАСЧЕТУ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООБМЕНА И ТЕМПЕРАТУРЕ СРЕДЫ

Введение. Данная задача ввиду сложности и громоздкости получаемых решений называется квазинелинейной. К настоящему времени имеется достаточно много приближенных аналитических методов решения задач теплопроводности с нелинейностью II рода [1].

В статьях [2, 3] методика расчета сводится к решению интегрального уравнения, полученного из анализа задачи теплопроводности при граничных условиях (ГУ) II рода. В предлагаемой работе сделана попытка получения интегрального уравнения через ГУ III рода. Наиболее полно задача решена в [3], но только для плоских тел и без расчета среднemasсовой и центральной температур.

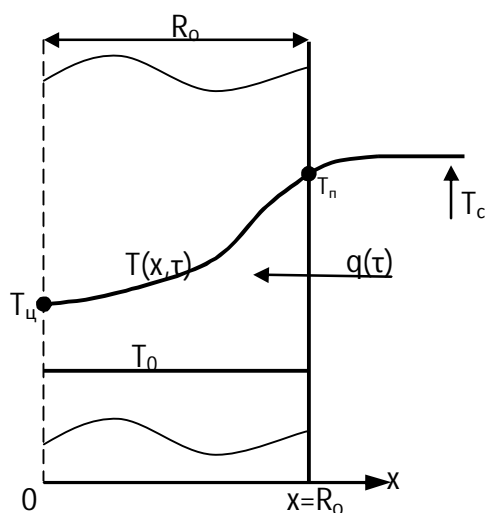


Рисунок 1 – К постановке задачи теплопроводности

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного нагрева тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до температуры среды $T_c(\tau)$ имеет вид (рис.1):

$$\frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X} \frac{\partial \theta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\theta(X, 0) = \theta_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial X} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial X} = Q(Fo), \quad (4)$$

где относительные температуры: $\theta T(x, \tau)/T_x$ – текущая; $\theta_0 = T_0/T_x$ – начальная; $\theta_c = T_c/T_x$ – среды; $\theta_n(Fo) = \theta(1, Fo)$ – на поверхности; T_x – характерная или масштабная температура, например, температура окружающей среды в начальный момент времени $T_x = T_{c,0}$; $X = x/R_0$; $Fo = a\tau/R_0^2$ – число Фурье; $Bi = \alpha R_0/\lambda$ – число Био; k – фактор геометрической формы, равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара.

Здесь относительный тепловой поток на поверхности

$$Q(\text{Fo}) = \text{Bi}(\text{Fo}) \cdot [\theta_c(\text{Fo}) - \theta_n(\text{Fo})]. \quad (5)$$

Результаты работы. Следуя Э.М.Гольдфарбу [4], зададимся полем температур в виде

$$\theta(X, \text{Fo}) = \theta_n(\text{Fo}) - \Delta\theta(\text{Fo}) \cdot V(X) \quad \text{или} \quad \theta(X, \text{Fo}) = \theta_n(\text{Fo}) + Q(\text{Fo}) \cdot V(X) / K_2, \quad (6)$$

где $\Delta\theta = \theta_n - \theta_u$; θ_u – температура в центре; K_2 – коэффициент усреднения теплового потока; $V(X)$ – относительная функция распределения температур от центра тела $X = 0$ до поверхности при $X = 1$. Преимуществом введения этой функции является то, что она характеризует распределение температур по сечению тела для любого момента времени в стадии регулярного режима нагрева (РРН) и, таким образом, не зависит от времени. При малых числах Био $V(X) = 1 - X^2$.

Применяя к соотношению (6) операцию усреднения [4], получим интегральное уравнение

$$\theta_{cp}(\text{Fo}) = \theta_0 + k \int_0^{\text{Fo}} Q(\eta) \cdot d\eta = \theta_n(\text{Fo}) - \tilde{g} \cdot Q(\text{Fo}), \quad (7)$$

где $\tilde{g} = V_{cp} / K_2$; $V_{cp} = k \int_0^1 V(X) \cdot X^{k-1} \cdot dX$ – среднее значение функции распределения,

при умеренных числах Био $V_{cp} = 2g$, $K_2 = 2$ и $\tilde{g} = g = 1/(k+2)$.

Полученное соотношение можно назвать уравнением связи между тепловым потоком, среднemasсовой и поверхностной температурами в квазистационарной стадии нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы.

Введем коэффициент термической массивности тела (КТМТ) $m(\text{Fo}) = 1 + \tilde{g} \cdot \text{Bi}(\text{Fo})$. Тогда интегральное уравнение (7) с учетом начального условия (2) и теплового потока (5) примет вид:

$$m(\text{Fo}) \cdot \theta_n(\text{Fo}) = \theta_0 + k \int_0^{\text{Fo}} Q(\eta) \cdot d\eta + \tilde{g} \cdot Q_c(\text{Fo}), \quad (8)$$

где $Q_c(\text{Fo}) = \text{Bi}(\text{Fo}) \cdot Q_c(\text{Fo})$ – известный тепловой поток со стороны окружающей среды.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решением дифференциального уравнения первого порядка

$$y' + f(x) \cdot y = G(x) \quad (9)$$

будет

$$y(x) = e^{-F(x)} \left[C + \int_0^x e^{F(x)} \cdot G(x) \cdot dx \right],$$

где C – постоянная интегрирования; $F(x) = \int_0^x f(x) \cdot dx$.

Дифференцируя интегральное уравнение (8) с учетом (5) по времени Fo и приводя его к каноническому виду (9), получим выражение для расчета температуры поверхности

$$\theta_n(\text{Fo}) = e^{-F(x)}[\theta_* + J(\text{Fo})], \quad (10)$$

где $x = \text{Fo}$, $F(x) = \tilde{\text{Fo}} + \ln \frac{m(\text{Fo})}{m_0}$, $e^{-F(x)} = \frac{m_0}{m(\text{Fo})} \cdot e^{-\tilde{\text{Fo}}}$; $e^{F(x)} = \frac{m(\text{Fo})}{m_0} \cdot e^{\tilde{\text{Fo}}(x)}$,

$$\tilde{\text{Fo}} = k \int_0^{\text{Fo}} b(\eta) \cdot d\eta = \frac{k}{g} \left[\text{Fo} - \int_0^{\text{Fo}} \frac{d\eta}{m(\eta)} \right] \approx A \cdot \text{Fo} \quad - \text{модифицированное число Фурье;}$$

$b(\text{Fo}) = \text{Bi}(\text{Fo})/m(\text{Fo})$ – эквивалентное или эффективное число Био;

$$J(\text{Fo}) = \int_0^{\text{Fo}} e^{F(x)} \cdot G(x) \cdot dx = A_1 \cdot J_1(\text{Fo}) + A_2 \cdot J_2(\text{Fo}), \quad J_1 = \int_0^{\text{Fo}} e^{A \cdot x} \cdot Q_c(x) \cdot dx,$$

$$J_2(\text{Fo}) = \int_0^{\text{Fo}} e^{A \cdot x} \cdot \dot{Q}_c(x) \cdot dx, \quad A_1 = k/m_0, \quad A_2 = \tilde{g}/m_0, \quad A = k \cdot (1 - 1/\bar{m})/\tilde{g},$$

$G(x) = [k \cdot Q_c(x) + \tilde{g} \cdot \dot{Q}_c(x)]/m(x)$, $\dot{Q}_c(x) = dQ_c(\text{Fo})/d\text{Fo} \equiv \dot{\text{Bi}} \cdot \theta_c + \text{Bi} \cdot \dot{\theta}_c$ – производная по времени; $m_0 = 1 + \tilde{g} \cdot \text{Bi}_0$ – КТМТ в начале процесса нагрева; $\text{Bi}_0 = \text{Bi}(0)$,

$m(\text{Fo}) = 1 + \tilde{g} \cdot \text{Bi}(\text{Fo})$, $\bar{m} = 1 + \tilde{g} \cdot \bar{\text{Bi}} \approx 0,5 \cdot (m_0 + m(\text{Fo}))$, $\bar{\text{Bi}} = \frac{1}{\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} \text{Bi}(\eta) \cdot d\eta$ – среднее по

времени число Био.

Постоянная интегрирования $\theta_* = \theta_n(0)$ находится из интегрального уравнения (8) при времени $\text{Fo} = 0$, т.е. $\theta_* = (\theta_0 + \tilde{g} \cdot Q_{c,0})/m_0$; $Q_{c,0} = \text{Bi}_0 \cdot \theta_c(0)$.

С целью упрощения расчетов, т.е. уменьшения числа интегрирований, произведем в J_2 операцию интегрирования по частям

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V dU;$$

$$J_2(\text{Fo}) = \int_0^{\text{Fo}} e^{A \cdot x} \cdot \dot{Q}_c(x) \cdot dx = U_V - A \int_0^{\text{Fo}} e^{A \cdot x} \cdot Q_c(x) \cdot dx \equiv U_V - A \cdot J_1(\text{Fo}).$$

Тогда общий интеграл в (10) станет

$$J(\text{Fo}) = A_2 \cdot U_V + A_3 \cdot J_1(\text{Fo}), \quad (11)$$

где $A_3 = A_1 - A \cdot A_2$; $U_V = (U \cdot V)_0^{\text{Fo}} = e^{\tilde{\text{Fo}}} \cdot Q_c(\text{Fo}) - Q_{c,0}$.

После определения температуры поверхности по выражению (10) из (5) легко находится тепловой поток $Q(\text{Fo})$, а затем по уравнению (7) среднemasсовая температура:

$$\theta_{cp}(\text{Fo}) = \theta_0 + k \int_0^{\text{Fo}} Q(\eta) \cdot d\eta$$

или приближенно, но упрощенно

$$\theta_{cp}(\text{Fo}) = \theta_n(\text{Fo}) - \tilde{g} \cdot Q(\text{Fo}). \quad (12)$$

Ввиду сложной зависимости от времени температуры поверхности (10) и трудностей в интегрировании (12) взамен среднемассовой температуры (12) можно приближенно использовать температуру θ^{TTT} модели термически тонкого тела (ТТТ). Дифференцируя (12) по времени Fo и полагая в нем $\theta_{cp} = \theta_n = \theta$, получим дифференциальное уравнение в каноническом виде (9): $\dot{\theta}(x) + k \cdot Bi(x) \cdot \theta(x) = Q_c(x)$ решением которого будет

$$\theta(Fo) \equiv \theta^{TTT} = \exp\left(-k \int_0^{Fo} Bi(x) \cdot dx \cdot \left[\theta_0 + \int_0^{Fo} \exp\left(-k \int_0^{\eta} Bi(x) \cdot dx\right) \cdot Q_c(x) \cdot dx \right]\right). \quad (13)$$

Температуру в центре тела определим из уравнения (6) при $X = 0$ и $V(0) = 1$:

$$\theta_u(Fo) = \theta_n(Fo) - Q(Fo)/K_2 \equiv H(Fo) \cdot \theta_n(Fo) - Q_c(Fo)/K_2, \quad (14)$$

где $H(Fo) = 1 + Bi(Fo)/K_2$.

Время инерционного периода Fo_1 найдем из условия достижения в центре значения заданной температуры $\theta_{u.3}(Fo_1) = \theta_0 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = 5\% = 0,05$ условно можно трактовать как степень прогрева центральных точек тела. Тогда из выражения (14) можно вычислить заданную температуру поверхности, которая наступит в конце начальной стадии (НС):

$$\theta_{n.3} = \frac{1}{H(Fo_1)} \left[\theta_{u.3} + \frac{Q_c(Fo_1)}{K_2} \right]. \quad (15)$$

Окончательно время инерционного периода найдем из уравнения (10) согласно условию

$$\theta_n(Fo_1) = \theta_{n.3}. \quad (16)$$

Ввиду сложности (11), уравнение (16) должно решаться методом последовательных приближений. Нулевое приближение получим из (10) при $J(Fo) = 0$:

$$Fo_1 = -\frac{(1-1/\bar{m})}{k(k+2)} \cdot \ln \frac{m(Fo_1) \cdot \theta_*}{m_0 \cdot \theta_{n.3}}, \quad (17)$$

где $\bar{m} = (m_0 + m(Fo_1))/2$ – среднеарифметическое значение КТМТ.

Можно также положить в (5) $\theta_n = \theta_{u.3}$ и использовать предложенную в [5] формулу

$$\tilde{Fo}_1 = \frac{1}{Q(Fo_1)} \int_0^{Fo} Q(\eta) \cdot d\eta = \frac{g}{2}. \quad (18)$$

Обычно время инерционного периода мало и на отрезке времени $0 \leq Fo < Fo_1$ тепловой поток в уравнении (5) можно считать постоянным, тогда выражение (18) упрощается до вида:

$$Fo_1 = 1/[2(k+2)]. \quad (19)$$

Проверку разработанной методики расчета на адекватность проведем путем сопоставления с численным решением [3] нагрева пластины ($k = 1$) от начальной темпе-

ратуры $\theta_0 = 0,15$ с нестационарным числом Био $Bi(Fo) = Bi_0 \cdot e^{Fo}$ и переменной температурой среды

$$\theta_c(Fo) = 1 + Pd \cdot Fo, \quad (20)$$

где $Bi_0 = 0,5$ и $Pd = 0,075$ – критерий Предводителя.

Подставляя в уравнение (10) и (11) $Bi(Fo)$ и $\theta_c(Fo)$ из (20) и производя интегрирование, получим

$$J_1(Fo) = \frac{Bi_0}{A+1} \left[e^{(A+1)Fo} - 1 + \frac{Pd \cdot \left(1 + e^{(A+1)Fo} \left((A+1) \cdot Fo - 1 \right) \right)}{A+1} \right]. \quad (21)$$

Числовой пример. Дадим пример расчета при времени $Fo = 0,5$. По формулам (20) число Био $Bi(0,5) = Bi_0 \cdot e^{Fo} = 0,5 \cdot e^{0,5} = 0,824$, температура среды $\theta_c(0,5) = 1 + 0,075 \cdot 0,5 = 1,0375$. Тепловой поток от среды $Q_c = Bi \cdot \theta_c = 0,824 \cdot 1,0375 = 0,855$.

В начальный момент времени при $Fo = 0$: $Bi = Bi_0 = 0,5$; $Q_{c,0} = 0,5 \cdot 1 = 0,5$. Коэффициент термической массивности тела (КТМТ) при $\tilde{g} = g = 1/3$ $m_0 = 1 + g \cdot Bi_0 = 1 + 0,5/3 = 7/6 = 1,167$ и текущий $m(0,5) = 1 + g \cdot Bi(0,5) = 1 + 0,824/3 = 1,275$. Среднеарифметический $\bar{m} = (m_0 + m(Fo))/2 = (1,167 + 1,275)/2 = 1,221$; $A = k(1 - 1/\bar{m})/g = 3 \cdot (1 - 1/1,221) = 0,542$; модифицированное число Фурье $\tilde{Fo} = A \cdot Fo = 0,271$. Начальная температура поверхности $\theta_* = (\theta_0 + g \cdot Q_{c,0})/m_0 = (0,15 + 0,5/3)/1,167 = 0,271$.

Коэффициенты: $A_1 = k/m_0 = 6/7$, $A_2 = g/m_0 = 2/7$, $A_3 = A_1 - A_2 \cdot A = 6/7 - 2 \cdot 0,542/7 = 0,702$; $U_v = e^{\tilde{Fo}} \cdot Q_c(x) - Q_{c,0} = e^{0,271} \cdot 0,855 - 0,5 = 0,622$.

Интеграл J_1 по формуле (21)

$$J_1(0,5) = \frac{0,5}{0,542+1} \left[e^{(0,542+1) \cdot 0,5} - 1 + \frac{0,075 \cdot \left(1 + e^{(0,542+1) \cdot 0,5} \left((0,542+1) \cdot 0,5 - 1 \right) \right)}{0,542+1} \right] = 0,38.$$

Суммарный интеграл по уравнению (11) $J(0,5) = (2/7) \cdot 0,622 + 0,702 \cdot 0,38 = 0,44$.

Температура поверхности по формуле (10) $\theta_n(0,5) = \frac{7/6}{1,275} \cdot e^{-0,271} [0,271 + 0,44] = 0,498$.

По выражению (14) температура в центре $\theta_u(0,5) = (1 + 0,824/2) \cdot 0,498 - 0,855/2 = 0,276$. Время инерционного периода по формуле (19) $Fo_1 = 1/6 = 0,167$.

Результаты расчетов при других числах Фурье приведены в табл.1, а на рис.2 – температурная диаграмма нагрева пластины от $\theta_0 = 0,15$ при нестационарном числе Био и температуре среды, изменяющейся по уравнению (20).

Из анализа данных табл.1 и рис.2 следует, что погрешность определения температур не превышает 6% и ее можно считать вполне приемлемой для инженерных расчетов.

Теперь данных достаточно для определения термических напряжений. Согласно [5] относительные осевые термонапряжения в любой точке

$$\tilde{\sigma}(X, Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta(X, Fo), \quad (22)$$

на поверхности (при $X = 1$)

$$\tilde{\sigma}_n(Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta_n(Fo) \quad (23)$$

Таблица 1 – Динамика изменения во времени температур поверхности θ_n и центра θ_u пластины, рассчитанная по методу конечных разностей (МКР) [3] и по предлагаемой методике

Число Фурье Fo	$\theta_n(\text{Fo})$		$\theta_u(\text{Fo})$	
	МКР [3]	По уравнению (10)	МКР [3]	По уравнению (14)
0	0,15	0,15	0,15	0,15
0,4	0,48228	0,45365	0,28537	0,23870
0,5	0,53581	0,49802	0,33261	0,27602
0,6	0,57813	0,55062	0,36663	0,32542
0,7	0,62749	0,59959	0,41221	0,37157
0,8	0,66933	0,64842	0,44817	0,41943
0,9	0,71581	0,6968	0,49873	0,46886
1	0,75512	0,74438	0,52662	0,51971
1,1	0,81232	0,79084	0,60754	0,57178
1,2	0,84873	0,83588	0,64612	0,62495
1,3	0,88637	0,87924	0,69331	0,67903
1,4	0,92243	0,92071	0,74222	0,73387
1,5	0,95561	0,96009	0,77013	0,78933
1,6	0,98031	0,99725	0,79474	0,84526
1,7	0,99984	1,03211	0,82008	0,90156

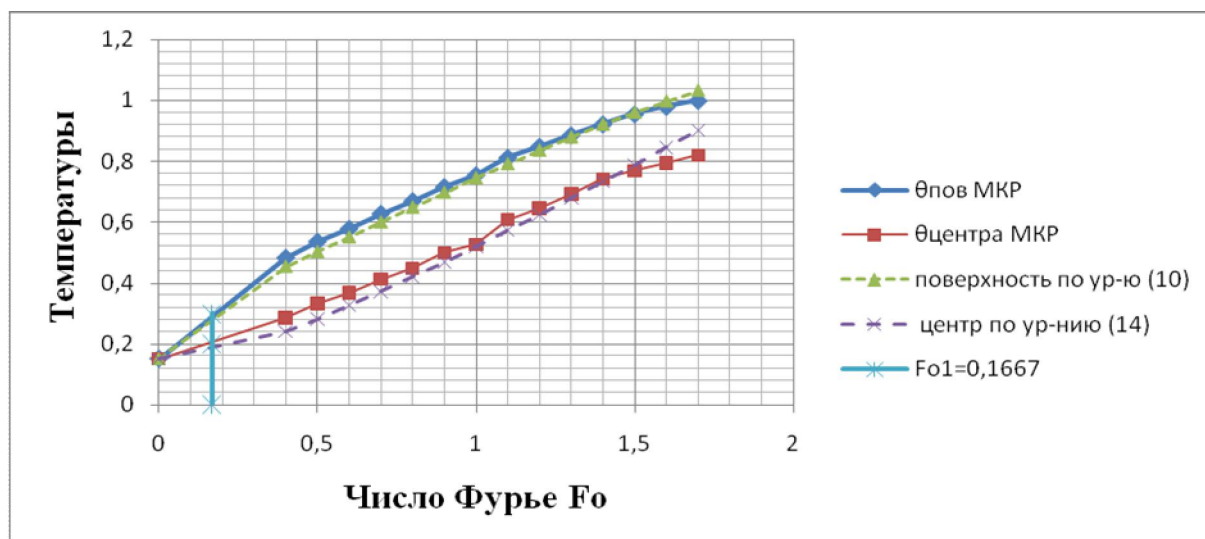


Рисунок 2 – Температурная диаграмма нагрева пластины от $\theta_0 = 0,15$ при нестационарном числе Био и температуре среды, изменяющихся по уравнению (20)

и в центральных точках тела (при $X = 0$)

$$\tilde{\sigma}_u(\text{Fo}) = \theta_{cp}(\text{Fo}) - \theta_u(\text{Fo}), \quad (24)$$

Окончательно размерные термические напряжения

$$\sigma(\text{Fo}) = \tilde{\sigma}(\text{Fo}) \cdot \sigma_0. \quad (25)$$

где $\sigma_0 = \beta E T_x / (1 - \nu)$ – максимально возможные термические напряжения, Па; β – линейный коэффициент термического расширения, $1/K$; E – модуль упругости, Па; ν – коэффициент Пуассона.

Выводы.

1. На основе анализа конвективного нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы в квазистационарной стадии выведено интегральное уравнение, с помощью которого можно приближенно решать задачи теплопроводности с нелинейностью в граничных условиях.

2. Разработана инженерная методика расчета температурных полей при переменных коэффициентах теплообмена и температуре среды.

3. Сравнение методики с точным численным решением показало, что погрешность определения температур не превышает 6% и ее можно считать вполне приемлемой для инженерных расчетов.

4. Приведены формулы для расчета осевых термических напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности / Коздоба Л.А. – М.: Наука, 1975. – 228с.
2. Саломатов В.В. К расчету радиационного охлаждения твердых тел / Саломатов В.В. // ИФЖ. – 1969. – Т.17. – №1. – С.127-134.
3. Саломатов В.В. Температурное поле неограниченной пластины при переменных значениях коэффициента теплообмена и температуры внешней среды / Саломатов В.В., Гончаров Э.И. // ИФЖ. – 1967. – Т. 14. – №4. – С.743-745.
4. Гольдфарб Э.М. Теплотехника металлургических процессов / Гольдфарб Э.М. – М.: Металлургия, 1967. – 439с.
5. Горбунов А.Д. Аналитический расчет температур и термических напряжений при граничных условиях II рода / Горбунов А.Д., Уклеина С.В. // Днепрпетровск: НМетАУ. – 2015. – Вып. 6 (21). – С.12-17.

Поступила в редколлегию 23.02.2016.

УДК 621.1.018

БЕЛОНОЖКО В.Ю., студент
ЧУХНО С.И., к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

УСЛОВИЯ ТЕПЛООБМЕНА НА ПОВЕРХНОСТИ ДЕТАЛИ ПРИ ШЛИФОВАНИИ

Введение. Эксплуатационные свойства деталей машин во многом формируются на этапе окончательной обработки, в качестве которой часто используется шлифование. При этом развиваются высокие температуры, определяющие свойства поверхностного слоя деталей. Одним из наиболее эффективных методов охлаждения при шлифовании является применение смазывающе-охлаждающих жидкостей. Оно может осуществляться свободно падающей или напорной струей, воздушно-жидкостной смесью, через поры круга, в среде охлаждающей жидкости и некоторыми другими способами [1]. Чаще всего применяется охлаждение свободно падающей струей, так как этот способ достаточно эффективен и наиболее прост в реализации.

Математические модели тепловых процессов в деталях при их обработке резанием содержат дифференциальное уравнение теплопроводности, начальное и граничные условия. Качество формулирования комбинаций граничных условий, соответст-