УДК 621.914 КОРОТКОВ В.С., к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Введение. Важное практическое значение имеет решение задач интерполяции гладких контуров сложной конфигурации прямыми отрезками с заданной точностью. В последующем информация в таком виде может применяться для описания контуров деталей при проектировании, решения задач по расчетам траекторий движения формообразующих инструментов при обработке на станках с числовым программным управлением (ЧПУ) и т.д. Поэтому разработка эффективных методов и алгоритмов построения интерполяционных ломаных с заданной точностью является задачей актуальной как на этапе проектирования изделий, так и при расчетах технологичных траекторий для станков с ЧПУ.

Постановка задачи. Для упрощения решения задач по описанию поверхностей сложной конфигурации и последующего использования геометрической информации в расчетах траекторий движения инструментов целесообразно использовать асимптотически оптимальные методы. Для эффективной реализации таких методов на компьютере необходимо разработать асимптотически оптимальные алгоритмы, которые можно использовать в средствах автоматизации на этапах проектирования и технологической подготовки металлообработки.

Результаты работы. Поверхности сложных гладких поверхностей деталей удобно записывать сплайнами, которые хорошо зарекомендовали себя в точном машиностроении. В последующем эта информация может быть преобразована в виде интерполяционных ломаных, удобных для реализации в системах автоматизированного проектирования и при подготовке управляющих программ.

Для построения алгоритма необходимо ввести некоторые условные обозначения и разъяснения.

В особенности ε-окрестностью точки M_O будем называть круг радиусом ε с центром в точке M_O, т.е. множество точек M таких, что $\left|\overline{MM_O}\right| \le \varepsilon$.

Объединение ε-окрестностей всех точек некоторой кривой $Г$ будем считать полем допуска кривой или ε - коридором (рис.1).

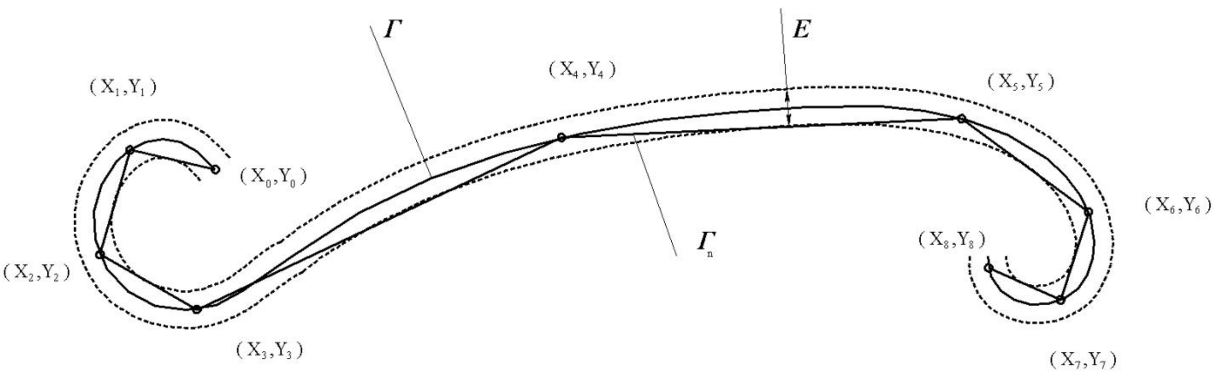

Рисунок 1 – Интерполяционная ломаная, лежащая в поле допуска кривой

Любую интерполяционную ломаную, размещенную в поле ε-допуска (размещенную в ε-коридоре), будем считать допустимой по точности описания для дальнейшего использования.

Интерполяционную ломаную с минимальным числом звеньев *n*, лежащую в поле допуска, назовем ε – оптимальным расчетным вариантом, а число ее звеньев в этом случае обозначим через $n_0 = n_0(\varepsilon, \Gamma)$.

Как отмечалось выше, под построением оптимального варианта расчетной траектории (расчетной ломаной) понимается построение траектории с минимальным числом звеньев *n*. Это позволит свести к минимуму время выполнения расчетов на компьютере и обойтись минимальным объемом информации.

Последовательность допустимых по точности вариантов расчетной траектории $\left\{\Gamma_{n_*}\right\}_{n_*=1}^{\infty}$ назовем асимптотически оптимальной, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{n_0(\varepsilon, \Gamma)}{n_*(\varepsilon, \Gamma)} = 1.$$

В работе [1] доказано, что если кривая Г гладкая или кусочно гладкая, а число $n_* = n_*\left(\varepsilon, \Gamma\right)$ выбрано из условия

$$n_* = \left[\sqrt{8\varepsilon} \Big/ \int_{t_0}^{T} \phi(t)dt \right] + 1, \tag{1}$$

где $\left[\alpha\right]$ – целая часть α, а

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{\left| x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t) \right|}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \tag{2}$$

и точки t_i^* выбраны из условия

$$\int_{t_0}^{t_i^*} (\phi(u) + \frac{1}{2})du = \frac{i}{n_*} \int_{t_0}^{T} (\phi(u) + \frac{1}{n_*})du, \tag{3}$$

то последовательность интерполяционных ломаных (траекторных линий), проходящих через точки $(x(t_i^*), y(t_i^*))$, будет асимптотически оптимальной при $\varepsilon \to 0$.

Для того, чтобы алгоритм был универсальным, применим как для данных с копира, так и для параметрически заданной кривой (например, в виде сплайна), зададим описание его для контура с более чем достаточным количеством опорных точек, т.е. считаем, что заданы точки (x_i, y_i), снятые с копира или полученные с помощью метода пополнения [2].

С учетом полученных ранее результатов приведем алгоритм построения асимптотически оптимального варианта расчетной интерполяционной ломаной (траектории).

Принцип построения алгоритма будет основан на замене всех величин, входящих в соотношение (1), (2) и (3) их дискретными аналогами.

Опишем дискретный аналог функции (2). Для этого сначала вычислим разности

$$\delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \delta y_i = y_i - y_{i-1} \qquad (i = \overline{1, N}) \tag{4}$$

и длины элементарных участков

$$\overset{=}{S}_i = \sqrt{(\delta x_i)^2 \_ (\delta y_i)^2} \qquad (i = \overline{1, N}). \tag{5}$$

В дальнейшем нам потребуются дополнительные точки $x_{-1}, y_{-1}, x_{N+1}, y_{N+1}$, которые построим по интерполяционным формулам Ньютона:

$$x_{-1} = x_0 - S_1 \delta x_i + 2S_2^2 \frac{(\delta x_2 - \delta x_1)}{\overset{=}{S}_2 + \overset{=}{S}_1}; \tag{6}$$

$$y_{-1} = y_0 - S_1 \delta y_i + 2S_1^2 \frac{(\delta y_2 - \delta y_1)}{\overset{=}{S}_2 + \overset{=}{S}_1}. \tag{7}$$

Аналогично определяем

$$x_{N+1} = x_N + S_N \delta x_N + 2S_N^2 \frac{(\delta x_N - \delta x_{N-1})}{S_N + S_{N-1}}; \tag{8}$$

$$y_{N+1} = y_N + S_N \delta y_N + 2S_N^2 \frac{(\delta y_N - \delta y_{N-1})}{\overset{=}{S}_N + \overset{=}{S}_{N-1}}. \tag{9}$$

Теперь вычисляем начальные и конечные разности:

$$\delta x_0 = x_0 - x_{-1}, \qquad \delta y_0 = y_0 - y_1, \tag{10}$$

$$\delta x_{N+1} = x_{N+1} - x_N, \qquad \delta y_{N+1} = y_{N+1} - y_N. \tag{11}$$

Далее строим дискретные аналоги производных x' и y':

$$\Delta x_i = \delta x_i / S_i, \quad \Delta y_i = \delta y_i / S_i \quad (i = \overline{0, N+1}) \tag{12}$$

и аналоги вторых производных x'' и y'':

$$\Delta^2 x_i = \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{S_{i+1} + S_i} + \frac{\Delta x_i - \Delta x_{i-1}}{S_i + S_{i-1}} \qquad (i = \overline{1, N}), \tag{13}$$

$$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{S_{i+1} + S_i} + \frac{\Delta y_i - \Delta x_{i-1}}{S_i + S_{i-1}} \qquad (i = \overline{1, N}). \tag{14}$$

И, наконец, строим значения в узлах дискретного аналога функции (2)

$$\phi_i = \sqrt{\frac{\left|\Delta^2 x_i \Delta y_i - \Delta^2 y_i \Delta x_i\right|}{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}}. \tag{15}$$

Дискретным аналогом функции $\phi(t)$ будет кусочно-постоянная функция $\phi_N(t)$ (рис.2), равная ϕ_i для $t \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$, где $\sigma_0 = 0$, $\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} S_j \quad (i = \overline{1, N})$.

Аналогом $\int_{t_0}^{T} \phi(t)dt$, фигурирующем в (1), будет величина

$$A = \int_0^{\sigma_N} \phi_N(t)dt = \sum_{i=1}^{N} \phi_i S_i. \tag{16}$$

Теперь согласно равенству (1) находим число звеньев асимптотически оптимальной расчетной траектории по формуле

$$n_i^* = \left[\frac{A}{\sqrt{8\varepsilon}}\right] + 1. \tag{17}$$

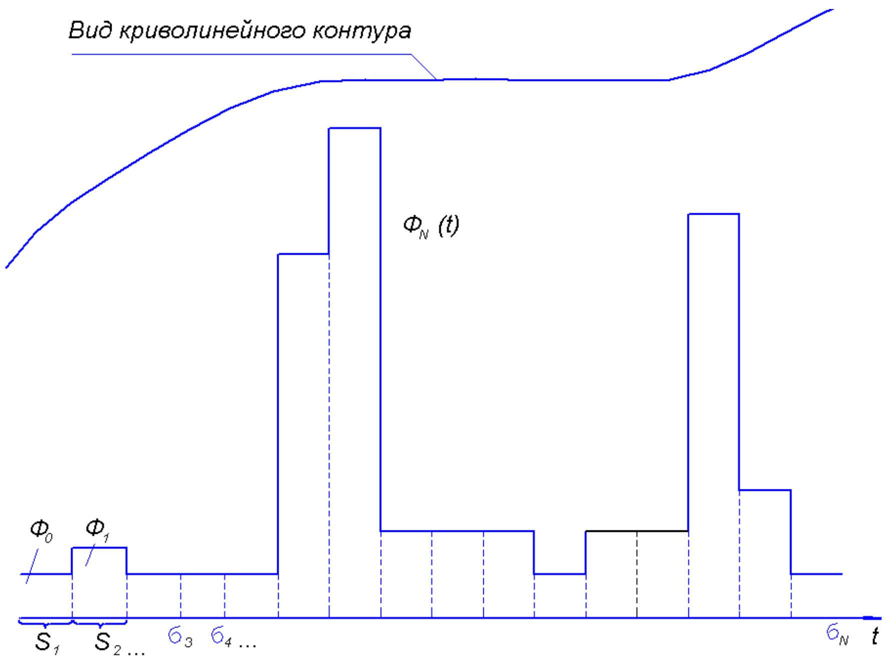

Рисунок 2 – Функция плотности распределения асимптотически оптимальных узлов

Ясно, что значения в узлах σ_i дискретного аналога $\int_{t_0}^{t} \phi_N(u)du$ будут вычисляться по формуле

$$A_i = \int_0^{\sigma_i} \phi_N(t)dt = \sum_{\nu=0}^{i} \phi_\nu S_\nu . \tag{18}$$

Таким образом

$$\int_0^t \phi_N(u)du \tag{19}$$

есть ломаная, проходящая через точки $(0{,}0),(\sigma_1, A_1)$ $,(\sigma_2 A_2),$ ... , $(\sigma_{N-1}, A_{N-1}),$ (σ_N, A).

Теперь решение уравнений (3), отыскание точек t_i^* эквивалентно следующему: отрезок $[0, A]$ разбиваем на n_* равных частей и искомые асимптотически оптимальные узлы $t_i^* (i = \overline{1, N})$ есть абсциссы точек пересечения параллельных оси σ прямых, проходящих через точки $(0, iA/n_*)$ с графиком построенной ломаной (19). Затем для построения расчетной ломаной достаточно найти значения x и y в этих узлах.

Полагаем: $x_0^* = x_0$, $y_0^* = y_0$, $x_{n_*}^* = x_N$, $y_{n_*}^* = y_N$.

Каждая точка $t_i^* (i = 1, n_* + 1)$ попадает в какой-то из отрезков $\lfloor \sigma_j, \sigma_{j+1} \rfloor$.

Тогда мы считаем

$$x_i^* = x_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{S_i}(t_i^* - \sigma_j), \tag{20}$$

т.е. определяем приближенное значение x в точке t_i^*, применяя линейную интерполяцию.

Аналогично находим y_i^*:

$$y_i^* = y_j + \frac{y_{j+1} - y_j}{S_j}(t_i^* - \sigma_j). \tag{21}$$

Выводы. Таким образом, процедура построения асимптотически оптимального расчетного варианта ломаной (траектории) такова.

1. По опорным точкам строим параметрический сплайн, из которого пополняем набор опорных точек (x_i, y_i) $\left(i = \overline{1, N}\right)$, если он не задан ранее. В случае, если кривая задана параметрически $(x(t), y(t))$ $t \in [t_0, T]$, этот пункт заменяется простым подсчетом:

$$x_i = x(t_0 + \frac{T - t_0}{N} \cdot i),$$

$$y_i = y(t_0 + \frac{T - t_0}{N} \cdot i).$$

2. По формулам (4)-(14) строим дискретные аналоги первых и вторых производных функций $x(t)$ и $y(t)$.

3. По формуле (15) строим дискретный аналог функции $\phi(t)$ (меры густоты узлов). Фактически в [1] доказано, что сгущать узлы ломаной необходимо пропорционально величине функции $\phi(t)$.

4. По формулам (16), (17) считаем число звеньев асимптотически оптимальной ломаной.

5. По формуле (18) определяем асимптотически оптимальные узлы t_i^*, по формулам (20), (21) – соответствующие им точки x_i^* и y_i^* ((при этом считаем, что $x_0^* = x_0$, $y_i^* = y_0$, $x_{n_*} = x_N$, $y_{n_*} = y_N$).

6. Ломаная, проходящая через точки x_i^* и y_i^* ($i = \overline{0, n_*}$), есть искомый вариант траектории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лигун А.А. Асимптотически оптимальный алгоритм кусочно-линейной интерполяции в решениях траекторных задач фрезерной обработки / А.А.Лигун, В.С.Коротков, А.А.Шумейко // Известия вузов. Машиностроение. – 1989. – №7. – С.147-151.
2. Коротков В.С. Описание сложных контуров деталей на этапе подготовки управляющих программ / В.С.Коротков // Зб. наукових праць ДДТУ (технічні науки). – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2009. – Вип. №3 (13). – С.26-29.

Поступила в редколлегию 23.02.2016.