

2. Степанов М. Влияние механических примесей, содержащихся в СОЖ, на структуру и микротвердость поверхностного слоя шлифованных деталей / Михаил Степанов, Наталья Шумакова // Смазочно-охлаждающие технологические средства в процессе абразивной обработки. – Ульяновск. – 1988. – С.78-84.
3. Худобин Л. Тонкая очистка технологических жидкостей при шлифовании. / Леонид Худобин, Валерий Ромашкин // Резание и инструмент. – 1984. – №31. – С.3-10.
4. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. / Румшинский Л.З. – М.: Наука, 1976. – 240с.
5. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н.Большев, Н.В.Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416с.
6. Редько С.Г. Вероятностный подход к исследованию качества поверхности при глубинном шлифовании / С.Г.Редько, А.В.Королёв, В.Н.Аштаев // Чистовая обработка деталей машин. – Саратов. – 1980. – С.81-95.
7. Молчанов В.Ф. Вероятностный подход к образованию шероховатости поверхностей при окончательной обработки / В.Ф.Молчанов // Системные технологии. – 2001 – № 2. – С.106-110.

Надійшла до редколегії 01.02.2016.

УДК 621.914

КОРОТКОВ В.С., к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ В ВИДЕ ЛОМАНЫХ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

Введение. В связи со спецификой ряда станков с числовым программным управлением (ЧПУ), в частности перемещение их рабочих органов по криволинейной траектории комбинациями элементарных перемещений, параллельных осям координат и кратных дискретности станка, возникает необходимость в разработке алгоритмов аппроксимаций криволинейных участков ломаными с ортогональными звеньями. Возникающие при этом погрешности, прежде всего, зависят от точности методов аппроксимации контуров такими ломаными, и от величины дискретности по заданным координатам конкретных станков, для которых рассчитывается траектория движения инструмента.

Постановка задачи. Таким образом, очевидна целесообразность в разработке и использовании алгоритмов аппроксимации сложных контуров деталей ломаными с ортогональными звеньями, длина которых кратна дискретности станка. Из практических соображений необходимо построить алгоритм аппроксимации с асимптотически минимальным числом звеньев при заданном поле допуска ε . При таком подходе к аппроксимации для некоторых деталей большое значение имеет первоначальная ориентация их на станке. Учитывая изложенное выше, необходимо для каждого положения детали строить аппроксимирующую ломаную с ортогональными звеньями при любом ее положении на станке, а затем необходимо подобрать такое положение, чтобы число звеньев было минимальным.

Результаты работы. Для практической реализации с использованием вычислительной техники намного удобнее применять алгоритм, определяющий сначала угол оптимальной ориентации детали, а затем для нее строящий ломаную с ортогональными звеньями, аппроксимирующую исходный контур.

Введем соответствующие условные обозначения и разъяснения.

Круг радиусом ε с центром в точке M_0 назовем ε окружностью точки M_0 , т. е. множество таких точек M , для которых $|MM_0| \leq \varepsilon$.

Кривую Γ , состоящую из точек с ε -«окрестностями», будем считать ε -коридором (ε -допуском).

Всякая ломаная с ортогональными звеньями, кратными заданной дискретности, лежащая в поле ε -допуска (рис.1), т.е. удовлетворяющая точностным требованиям, будет называться допустимым по точности вариантом ломаной.

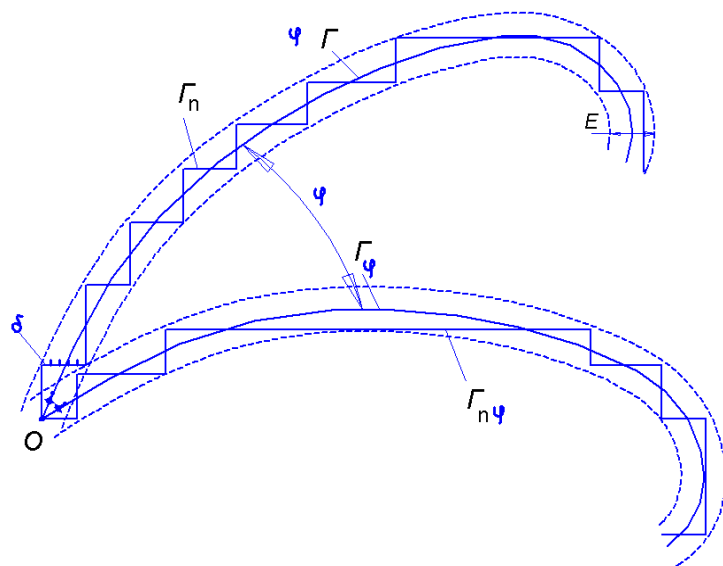


Рисунок 1 – Ориентация контура детали относительно координатных осей при аппроксимации ломаными с ортогональными звеньями

Γ задана параметрическими уравнениями $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ ($t \in [t_0, T]$).

Угол поворота φ контура относительно координатных осей против часовой стрелки выбран из условия

$$\min_{\varphi} \int_{t_0}^T \psi_{\varphi}(t) dt = \int \psi_{\varphi_0}(t) dt, \quad (1)$$

где

$$\psi_{\varphi}(t) = \frac{|x'_{\varphi}(t)y'_{\varphi}(t)|}{\sqrt{(x'_{\varphi}(t))^2 + (y'_{\varphi}(t))^2}} \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} x_{\varphi}(t) &= x(t) \cos \varphi - y(t) \sin \varphi, \\ y_{\varphi}(t) &= x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть

$$B = \int_{t_0}^T \psi_{\varphi_0}(t) dt \quad (4)$$

и число изломов $n_* = n(\Gamma, \varepsilon, \delta, \varphi_0)$, где ε – величина допустимого отклонения, а δ – заданная дискрета, выбранная из равенства

Ломаную с минимальным числом звеньев n , лежащую в поле ε -допуска, назовем ε -оптимальным расчетным вариантом, а число ее звеньев в этом случае будем обозначать $n_* = n_*(\varepsilon, \Gamma)$.

Последовательность допустимых по точности вариантов расчетной траектории $\{\Gamma_{n(\varepsilon)}\}_{n=1}^{\infty}$ назовем асимптотически оптималь-

ным, если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n(\varepsilon)}{n_*(\varepsilon, \Gamma)} = 1$.

При построении будем опираться на следующий результат, полученный в работе [1].

Пусть гладкая кривая

$(t \in [t_0, T])$.

$$n_* = \left[\frac{B}{2\varepsilon - \delta\sqrt{2}} \right] + 1, \quad (5)$$

где $[\beta]$ – целая часть числа β .

Пусть узлы $t_{i,n}^*$ выбраны из условий

$$t_{0,n}^* = \tau_0, \quad \int_{t_0}^{t_{i,n}^*} (\psi_{\varphi_0}(t) + 1/n_*) dt = \frac{iB}{n_*} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6)$$

тогда ломаная с ортогональными звеньями, проходящая через точки

$$\left((x(t_{0,n}^*), y(t_{0,n}^*)), (x(t_{0,n}^*), \frac{y(t_{0,n}^*) + (y(t_{1,n}^*)))}{2}), \right. \\ \left. (x(t_{1,n}^*), \frac{y(t_{0,n}^*) + y(t_{1,n}^*)}{2}), (x(t_{1,n}^*), \frac{y(t_{1,n}^*) + y(t_{2,n}^*)}{2}), \dots \right) \quad (7)$$

будет асимптотически оптимальной.

Рассмотрим построение алгоритма. Пусть задан криволинейный контур точками M_1, M_2, \dots, M_n , достаточно точно его характеризующими. Построим параметрический сплайн $(S(x, t), S(y, t))$ по этим точкам и снимем с него более полный набор точек, лежащих на контуре.

По набору точек $k_i = (\overline{0, N})$ строим дискретные аналоги всех выражений, входящих в приведенную формулировку.

Построим разности

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i & (i = \overline{1, N}), \\ \Delta y_i &= y_{i+1} - y_i & (i = \overline{1, N}), \\ S_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} & (i = \overline{1, N}) \end{aligned} \quad (8)$$

и функцию $\theta_N(\varphi)$, являющуюся дискретным аналогом

$$\int_{t_0}^T \Psi_{\varphi}(t) dt : \quad (9)$$

$$\theta_N(\varphi) = \sum_{i=1}^N \frac{|2\Delta x_i \Delta y_i \cos 2\varphi + ((\Delta x_i)^2 - (\Delta y_i)^2) \sin 2\varphi|}{S_i}.$$

Найдем угол φ_0 из условий

$$\max_{0 \leq \varphi \leq \pi/2} \theta_N(\varphi) = \theta_N(\varphi_0). \quad (10)$$

Ясно, что (10) есть дискретизация соотношения (1). Находим дискретный аналог величины B , фигурирующей в (4):

$$B_N = \theta_N(\varphi_0). \quad (11)$$

Согласно равенству (5) выбираем число n_* следующим образом:

$$n_* = \left[\frac{B_N}{2\varepsilon - \delta\sqrt{2}} \right] + 1 \quad (12)$$

и положим $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = S_1$, $\delta_2 = S_1 + S_2 + \dots$, $\delta_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

Обозначим через $\psi(t)$ кусочно-постоянную функцию, равную

$$\psi_i = \frac{\left| 2\Delta x_i \Delta y_i \cos 2\varphi_0 + ((\Delta x_i)^2 - (\Delta y_i)^2) \cdot \sin 2\varphi \right|}{S_i} + \frac{\varepsilon}{n_*} \quad (13)$$

для $t \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]$. Понятно, что $\int_0^t \psi_N(u) du$ есть строго возрастающая ломаная, проходящая через точки (σ_i, c_i) ($i = 0, N$), где

$$c_0 = 0, \quad c_i = \sum_{v=1}^i \psi_v \cdot S_v, \quad (i = \overline{1, N}). \quad (14)$$

Эта функция является дискретным аналогом функции

$$\int_{t_0}^t \psi_{\varphi_0}(u) du, \quad (15)$$

фигурирующей в (6).

Отыскание точек t_i^* (решение уравнений (6)) осуществляется путем отыскания абсцисс точек пересечения прямых, параллельных оси σ , проходящих через точки $(0, i \cdot c/n_*)$ с графиком ломаной (6). Затем для построения расчетной ломаной достаточно найти значения x и y в этих узлах. Каждая точка t_i^* попадает в какой-то из отрезков $[\sigma_j, \sigma_{j+1}]$. Тогда мы определяем приближенное значение x в точке t_i^* , применяя линейную интерполяцию:

$$x_i^* = x_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{S_j} (t_i^* - \sigma_j), \quad (16)$$

и аналогично

$$y_i^* = y_j + \frac{y_{j+1} - y_j}{S_j} (t_i^* - \sigma_j). \quad (17)$$

Кроме того, считаем, что $x_0^* = x_0$, $y_0^* = y_0$. Теперь, наконец, получаем асимптотически оптимальную ломаную с ортогональными звеньями, каждое из которых кратное заданной дискрете, проходящую через точки

$$(x_0^{**}, y_0^{**}), (x_0^{**}, y_{1/2}^{**}), (x_1^{**}, y_{1/2}^{**}), (x_1^{**}, y_{3/2}^{**}), (x_2^{**}, y_{3/2}^{**}), (x_2^{**}, y_{5/2}^{**}), \dots \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} x_i^{**} &= \left\langle \frac{x_i^*}{\delta} \right\rangle \delta & (i = \overline{0, N}), \\ y_{i-1/2}^{**} &= \left\langle \frac{y_i^* + y_{i-1}^*}{\delta} \right\rangle \delta & (i = \overline{1, N}), \\ y_0^{**} &= \left\langle \frac{y_0^*}{\delta} \right\rangle \delta. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\langle \gamma \rangle$ – ближайшее к γ целое число.

Выводы. Таким образом, процедура построения асимптотически оптимального алгоритма аппроксимации криволинейных контуров ломаными с ортогональными звеньями такова.

1. По опорным точкам строим параметрический сплайн, из которого пополняем набор опорных точек (x_i, y_i) ($i = 1, N$). Если исходная кривая задана параметрически $(x(t), y(t))$ $t \in [t_0, T]$, этот пункт заменяется простым подсчетом:

$$x_i = x\left(t_0 + \frac{T - t_0}{N} \cdot i\right),$$

$$y_i = y\left(t_0 + \frac{T - t_0}{N} \cdot i\right).$$

2. По формулам (8) вычисляем приращения x , y и длины элементарных отрезков ломаной, соединяющей точки.

3. Задаем число m и вычисляем числа $\theta_N(\varphi_i)$, где $\varphi_i = \frac{i\pi}{2m}$.

4. Выбираем наименьшее из чисел $\theta_N(\varphi_i)$ ($i = 1, m$). Пусть, например, это будет $\theta_N(\varphi_{i_0})$ и определяем угол $\varphi_0 = i_0\pi / 2m$.

5. Определяем число B_N по формуле (11) и оптимальное число переключений n_* по формуле (12).

6. Определяем числа ψ_i по формуле (13) и, исходя из функции $\int_0^t \psi_N(u) du$, выбираем асимптотически оптимальные узлы t_i^* .

7. Вычисляем координаты x_i^* и y_i^* , x_i^{**} и $y_{i-1/2}^{**}$ по формулам (16)-(19).

8. Строим асимптотически оптимальную ломаную с ортогональными звеньями по формуле (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лигун А.А. Асимптотически оптимальный алгоритм кусочно-линейной аппроксимации с ортогональными звеньями при подготовке управляющих программ / А.А.Лигун, В.С.Коротков, А.А.Шумейко. – К., 1987. – Деп в УкрНИИНТИ 21.09.87, №2620. – 27с.
2. Лигун А.А. Асимптотически оптимальный алгоритм аппроксимации криволинейных контуров ортогональными звеньями в решениях траекторных задач фрезерной обработки / А.А.Лигун, А.А.Шумейко, В.С.Коротков // Известия вузов. Машиностроение. – 1989. – №11 – С.136-140.

Поступила в редколлегию 23.02.2016.