

моделі” та „Економетрика”, використання якого сприяє формуванню ключових професійних компетентностей.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Таха Хемди А. Введение в исследование операций / Таха Хемди А.; пер. с англ. – 6-е издание. – М.: Издательский дом „Вильямс”, 2001. – 912с.
2. Исследование операций в экономике: уч. пособ. для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407с.
3. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: підруч. / О.В.Ульянченко. – Суми: Довкілля, 2010. – 594с.
4. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: підруч. / Ю.П.Зайченко. – К.: ВІПОЛ, 2000. – 688с.
5. Толбатов Ю.А. Економетрика: підруч. для студ. екон. спеціальностей вищ. навч. закл. / Ю.А.Толбатов. – К.: Четверта хвиля, 1997. – 320с.
6. Вітлінський В.В. Моделювання економіки/ В.В.Вітлінський. – К.: КНЕУ, 2003. – 358с.
7. Харламова Г.О. Прикладна економетрика: навч. посіб. / Г.О.Харламова, О.І.Черняк. – К.: Науковий світ, 2011. – 187с.
8. Математика для экономистов на базе Mathcad / А.А.Черняк, В.А.Новиков, О.И.Мельников, А.В.Кузнецов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 496с.
9. Лук’яненко І.Г. Економетрика: практикум з використанням комп’ютера / І.Г.Лук’яненко, Л.І.Краснікова. – К.: Товариство „Знання”, КОО, 1998. – 220с.
10. Дутка Г.Я. Проблема формування математичної компетентності у професійній підготовці майбутніх економістів / Г.Я.Дутка // Вісник Університету банківської справи Національного банку України. – 2013. – № 2 (17). – С.268-272.
11. Мединцева И.П. Формирование профессиональных компетенций при обучении студентов эконометрике / И.П.Мединцева // Альманах современной науки и образования. – 2014. – № 2 (81). – С.107-109.
12. Байгушева И.А. Формирование математической компетентности экономистов в вузе / И.А.Байгушева // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – №1. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=5543> (дата звернення: 05.09.2017).
13. Куделіна О.В. Математична освіта студентів у світлі впровадження компетентнісного підходу /О.В.Куделіна // Дидактика математики: проблеми і дослідження: між-нар. зб. наук. робіт. – Донецьк. – 2008. – Вип. 29. – С.13-17.

*Надійшла до редколегії 10.10.2017.*

УДК 378.244

ДЕРЕЦЬ О.Л., к.т.н., доцент  
САДОВОЙ О.В., д.т.н., професор  
ДЕРЕЦЬ С.О., студент

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам’янське

### МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ТА МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

**Вступ.** Перехідні процеси у колах з двома накопичувачами енергії є типовими для більшості практично значущих конфігурацій електричних кіл, які можуть бути описані системами диференціальних рівнянь другого порядку. При цьому вільні складові перехідних величин таких процесів вичерпно характеризують динаміку кіл вищих порядків. Враховуючи тотожність математичного опису електричних кіл та електро-механічних систем, слід вважати доцільним первинне ознайомлення фахівців-

електромеханіків з принципами та базовими прийомами моделювання на етапі вивчення перехідних процесів у практикумі з електротехніки.

**Постановка задачі.** Лінійні систем диференціальних рівнянь мають аналітичні розв'язки, визначенню яких присвячені фундаментальні методи „Теоретичних основ електротехніки” [1], зокрема класичний, операторний та застосування інтегралу Дюамеля. Ця обставина дозволяє виконувати просту і переконливу перевірку достовірності і точності математичних моделей шляхом порівняння результатів їх чисельного інтегрування із миттєвими значеннями, отриманими в ході аналітичного розв'язання. Іншою задачею, розв'язуваною за допомогою моделювання, є порівняльний аналіз перехідних процесів при різних співвідношеннях параметрів кіл, що зумовлюють різні значення коренів характеристичного рівняння.

**Результати дослідження.** Розглянемо електричне коло з двома накопичувачами енергії на прикладі послідовно з'єднаних елементів: резистивного  $R$ , індуктивного  $L$  та ємнісного  $C$ , до яких в результаті комутації приєднується джерело постійної ЕРС. Як відомо з теоретичної електротехніки, характеристичне рівняння RLC-кола

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0, \quad (1)$$

де  $s$  – комплексна змінна, має корені

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (2)$$

За умови  $\delta > \omega_0$ , тобто

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (3)$$

корені є дійсними від'ємними  $s_1 = -a_1$ ,  $s_2 = -a_2$ , де  $a_1$  – додатні константи, вільний процес має аперіодичний характер, а миттєве значення перехідного струму описується виразом

$$i_B = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t}. \quad (4)$$

Якщо  $\delta = \omega_0$ , тобто

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (5)$$

корені є дійсними від'ємними кратними  $s_1 = s_2 = -a$ , вільний процес має критичний характер, а вираз миттєвого значення перехідного струму має вигляд

$$i_B = A_1 e^{-at} + A_2 t e^{-at}. \quad (6)$$

У випадку, коли  $\delta < \omega_0$ , тобто

$$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (7)$$

корені є комплексно-сполученими:  $s_{1,2} = -\delta \pm j\omega$ , а миттєве значення вільного струму описується виразом

$$i_B = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi). \quad (8)$$

Оскільки ці три варіанти вільних складових перехідних величин зазвичай вивчаються у практикумі з теоретичної електротехніки, їх графічне представлення може вважатися певним еталоном для самостійної оцінки студентами достовірності моделей.

Виконаємо побудову математичної моделі RLC-кола з джерелом постійної ЕРС. За другим законом Кірхгофа складемо рівняння рівноваги миттєвих значень напруг

$$e = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C. \quad (9)$$

Розглянемо випадок замикання ключа, що з'єднує джерело ЕРС із навантаженням, при нульових початкових умовах

$$i(0-) = 0, u_C(0-) = 0. \quad (10)$$

Безпосередньо із законів комутації можна визначити основні незалежні початкові умови для напруги ємності  $u_C$  та струму  $i$ , які найзручніше вважати змінними інтегрування. Розв'яжемо рівняння (9) відносно першої похідної змінної інтегрування, тобто струму:

$$\frac{di}{dt} = \frac{e - u_C - Ri}{L}, \quad (11)$$

та врахуємо диференційний зв'язок між напругою та струмом ємності  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , з якого отримаємо

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}. \quad (12)$$

Вирази (10)-(12) описують RLC-коло у формі Коші. Схема моделі на основі інтегруючих ланок, що реалізує рівняння (11), (12), показана на рис.1 для трьох варіантів налаштувань параметрів при приєднанні ЕРС  $E=10$  В.

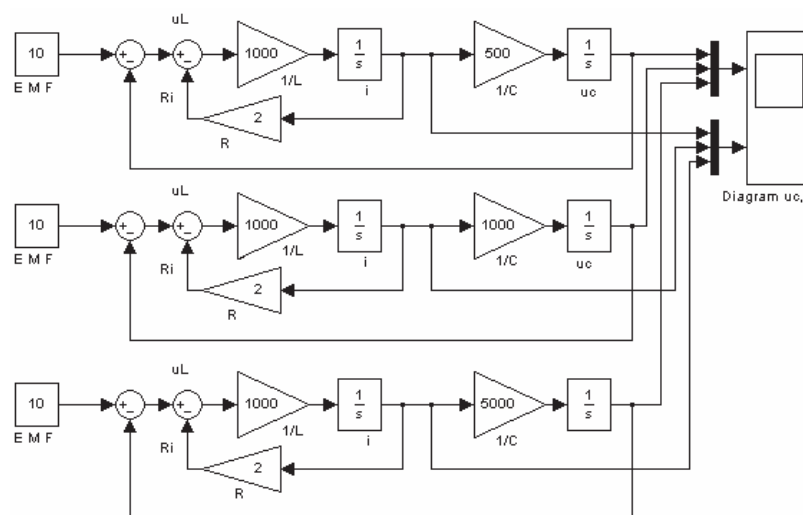


Рисунок 1 – Схема моделі RLC – кола для варіантів налаштування (13), (14), (15)

Умові (3) існування аперіодичного процесу задовольняє комбінація параметрів

$$R=2 \text{ Ом}, L = 0,001 \text{ Гн}, C = 0,002 \text{ Ф}, \quad (13)$$

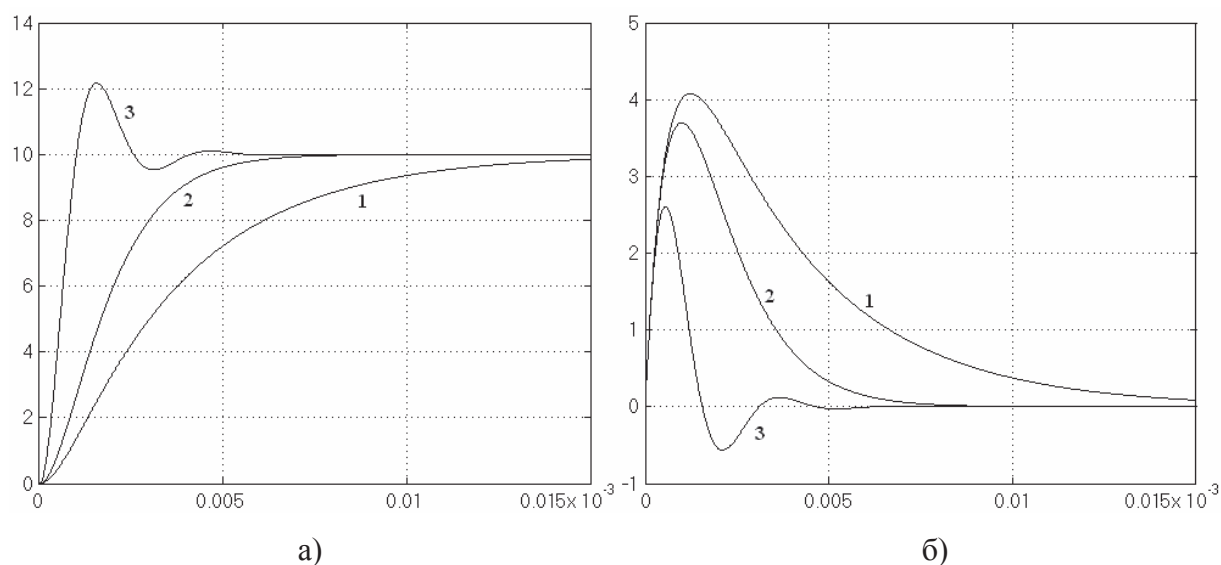
умові (5) виникнення критичного процесу відповідають параметри

$$R=2 \text{ Ом}, L = 0,001 \text{ Гн}, C = 0,001 \text{ Ф}, \quad (14)$$

а коливальний процес виникає за умови (7) при

$$R=2 \text{ Ом}, L = 0,001 \text{ Гн}, C = 0,0002 \text{ Ф}. \quad (15)$$

Графіки перехідної напруги конденсатора і перехідного струму для цих трьох варіантів налаштування представлені на рис.2. Вони утворюють сімейства перехідних характеристик, що спрощує візуальне співставлення варіантів протікання процесів з різним характером вільних складових. Якісна оцінка результатів моделювання свідчить про відповідність форми часових діаграм теоретичним уявленням про вигляд аперіодичного (рис.2, крива 1), критичного (рис.2, крива 2) і коливального (рис.2, крива 3) процесів, що підтверджує достовірність побудованої математичної моделі.



а) – часові діаграми напруги конденсатора; б) – часові діаграми струму

Рисунок 2 – Сімейства перехідних характеристик  $u_C, i$

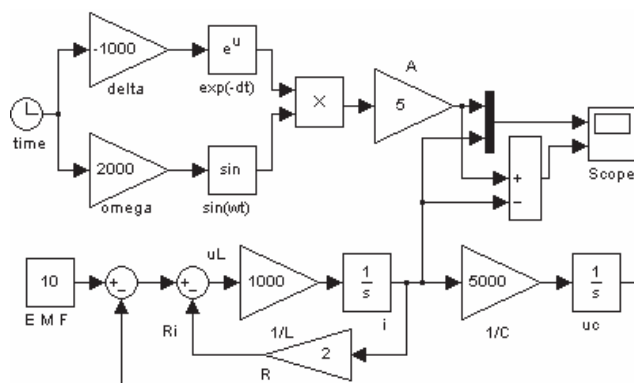


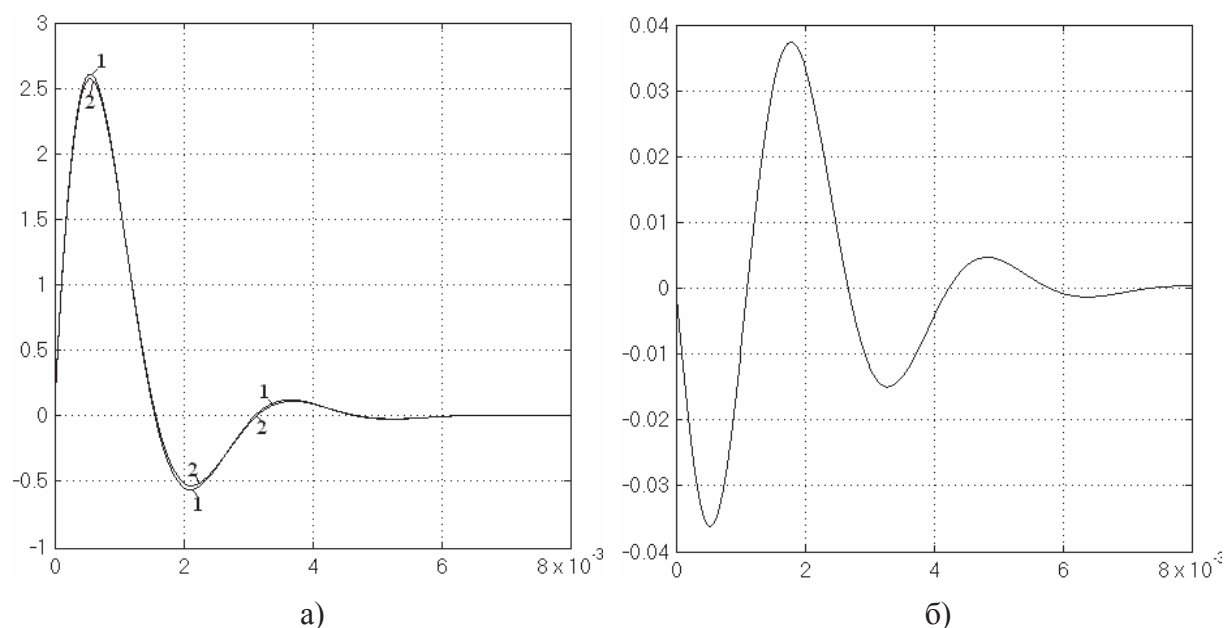
Рисунок 3 – Схема порівняння результатів моделювання з аналітичним розв’язком

Для оцінки точності процесу чисельного інтегрування можна скористатися схемою, наведеною на рис.3, яка разом з динамічною моделлю відтворює аналітичний ви-

раз для перехідного струму при коливальному характері вільної складової за нульових початкових умов

$$i = \frac{E}{\omega L} e^{-\delta t} \sin(\omega t). \quad (16)$$

На рис.4, а) зображено результат накладання графіків перехідного струму, отриманих шляхом чисельного і аналітичного розв'язань задачі. Розбіжності між цими графіками більш явно демонструє рис.4, б), на якому наведено їх різницю у збільшеному масштабі. Приймаючи аналітичний розв'язок за еталонний, можемо вважати криву на рис.4, б) графіком похибки чисельного інтегрування. Як відомо [2], величина цієї похибки залежить від методу та кроку чисельного інтегрування. Отже, дослідженню такого впливу доцільно присвятити окрему серію експериментів з порівняльною схемою (рис.3), здійснивши їх з різними методами інтегрування та значеннями кроку.



а) – розрахунковий (1) та аналітичний (2) графіки; б) – похибка інтегрування

Рисунок 4 – Оцінка похибки розрахунку перехідного струму

**Висновки.** Викладений у даній роботі метод дослідження динаміки електричних кіл поєднує теоретичне перетворення їх математичного опису на схему моделі з експериментальною складовою – побудовою перехідних процесів. Доступність аналітичних розв'язків рівнянь динаміки лінійних кіл дозволяє дослідним шляхом оцінювати точність чисельного інтегрування. Перспектива викладеного методу розрахунку перехідних процесів полягає у його застосуванні до нелінійних електричних кіл, для яких дана задача має виключно чисельне розв'язання.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов / Бессонов Л.А. – М.: Высшая школа, 1984. – 559с.
2. Моделювання електромеханічних систем: підруч. / [Чорний О.П., Луговой А.В., Родькін Д.Й. та ін.]. – Кременчук, 2001. – 376с.

Надійшла до редколегії 09.01.2018.