

РОЗДІЛ «ПРОКАТНЕ ВИРОБНИЦТВО»

УДК 539.374.001.8

DOI 10.31319/2519-2884.32.2018.162

ЧИГИРИНСКИЙ В.В., д.т.н., профессор
КОСМИНЕНКО С.А., магистр
ХАЛЯВКА М.А., магистр
ЛЕВИЦКАЯ В.А.* , преподаватель

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское
*Общеобразовательная школа №1, г. Вараж Ровенской области

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение. Современное развитие производства требует новых подходов решения многих практических задач, включая современные разработки математических моделей прогноза и управления многофункциональных, сложных, быстроизменяющихся во времени процессов металлургии и машиностроения. Одной из основных задач в теории обработки металлов давлением является определение напряженного состояния в зоне пластического течения. Степень допущений решаемых задач определяет степень упрощений результата теории и практики.

В теории пластичности можно отметить следующую схему решаемых прикладных задач – это половинчатые решения либо в напряжениях, либо в деформациях. Такие подходы получили широкое распространение как в отечественной литературе, так и за рубежом. Предлагается более сложный и более эффективный подход, когда задача ставится и решается комплексно, как замкнутая. В этом случае качественно и количественно изменяется конечный результат. Появляется возможность аналитически исследовать процесс пластического формоизменения как в напряжениях, так и в деформациях, получить модель пластической среды, учесть влияние разных зон друг на друга, использовать единые выражения для всего очага деформации.

Известны решения линейной задачи теории пластичности для определения контактных напряжений в очаге деформации при простом процессе прокатки [1, 2]. В этих случаях очаг деформации разбивается на несколько зон, для каждой из которых применяется свой закон трения, Амонтона или Кулона. В работах [3-6] представлен новый метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций. Однако его использование в прикладных задачах ограничено только одним процессом осадки с использованием простейших граничных условий. Можно показать, что усложнение условий на контакте не ограничивает возможности предлагаемого метода, появляется возможность получить новый результат задачи применительно к простому процессу прокатки, характеризующему асимметричное нагружение.

Постановка задачи. Общая постановка замкнутой плоской задачи теории пластичности известна [7, 8]. Состоит она из шести дифференциальных и алгебраических уравнений теории пластичности, граничных условий в напряжениях и скоростях деформации:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot k^2,$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = F,$$

$$\xi_x + \xi_y = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x},$$

$$\tau_n = -k \cdot \text{Sin}[A\Phi - 2 \cdot \varphi],$$

$$\gamma_n = -2\beta \cdot \text{Sin}[B\Phi - 2 \cdot \varphi].$$

Результаты работы. Использование тригонометрической и фундаментальной подстановки позволяет в (1) определить аналитическое решение для напряжений в виде [6, 7]:

$$\sigma_x = -H_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \text{Cos}A\Phi + k_0,$$

$$\sigma_y = -3H_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \text{Cos}A\Phi + k_0, \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = H_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \text{Sin}A\Phi$$

при $\theta_x = -A\Phi_y$, $\theta_y = A\Phi_x$; $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$, $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$,

где H_σ – функция координаты x , определяющая граничные условия на концах очага деформации; θ и $A\Phi$ – координатные гармонические функции, определяемые очевидными условиями в очаге деформации. Нижние индексы координатных функций обозначают частные производные.

Из решения [5, 7] следует, что

$$H_\sigma = \frac{C_0 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) + C_1 \cdot \left(\frac{l}{2} + x\right)}{l}, \quad (3)$$

где C_0 , C_1 , l – постоянные, определяющие напряжения на входе и выходе из очага деформации, длина очага деформации. Подставляя условия на контакте в (2), с учетом условия пластичности, можно записать

$$C_0 = \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp\theta_0 \cdot \text{Cos}A\Phi_0},$$

$$C_1 = \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp\theta_1 \cdot \text{Cos}A\Phi_1}, \quad (4)$$

где k_0 , k_1 – сопротивления пластической деформации сдвига на входе и выходе из очага деформации; θ_0 , θ_1 – функции θ на входе и выходе из очага деформации; $A\Phi_0$, $A\Phi_1$ – значение функции $A\Phi$ на входе и выходе из очага деформации; ξ_0 и ξ_1 – постоянные, учитывающие влияние натяжения или подпора.

Из уравнения Лапласа (2) получаем простейшее его решение для напряжений с учетом граничных условий (1) в виде

$$A\Phi' = - \left[AA_6' \cdot \left(\frac{l}{2} + x \right) \cdot y + AA_6'' \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \cdot y - 2 \cdot \varphi \right], \quad (5)$$

где φ – угол наклона площадки контакта. С учетом соотношений Коши-Римана [3]

$$\theta'_x = -A\Phi_y, \quad \theta'_y = A\Phi_x,$$

и уравнения Лапласа (2) определяем функцию θ , действительно

$$\theta' = -\frac{1}{2} \cdot (AA_6' + AA_6'') \cdot [(x + x_0)^2 - y^2] - (AA_6' \cdot l_{om} - AA_6'' \cdot l_{on}) \cdot (x - x_0). \quad (6)$$

С учетом (5) и граничных условий определяем нейтральный угол, показывающий положение нейтрального сечения в очаге деформации и значение постоянной AA_6 . Действительно, в нейтральном сечении касательное напряжение на контакте равно нулю, т.е. при $x = x_0$, $y = h_\gamma / 2 \approx h_1 / 2$, $\varphi = \gamma$, $A\Phi' = 0$

$$0 = - \left[AA_6' \cdot \left(x_0 + \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{h_\gamma}{2} + AA_6'' \cdot \left(x_0 - \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{h_\gamma}{2} - 2 \cdot \gamma \right],$$

где x_0 – координата, определяющая положение нейтрального сечения, при этом

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \frac{AA_6' \cdot R \cdot \frac{h_1}{2}}{2 + (AA_6' + AA_6'') \cdot R \cdot \frac{h_1}{2}}. \quad (7)$$

Для определения в (7) значения нейтрального угла необходимо знать постоянные величины AA_6 . Запишем граничные условия на краю очага деформации, на выходе из очага деформации в виде

$$x = \frac{l}{2}, \quad y = h_1 / 2, \quad \varphi = 0, \quad A\Phi' = -A\Phi_1, \quad \theta = \theta_1,$$

на входе

$$x = -\frac{l}{2}, \quad y = h_0 / 2, \quad \varphi = \alpha, \quad A\Phi' = A\Phi_0, \quad \theta = \theta_0,$$

где h_1 – высота полосы на выходе из очага деформации, l – длина очага деформации.

После подстановки граничных условий для значений AA_6 имеем

$$AA_6' = 2 \cdot \frac{A\Phi_1 - \alpha}{l \cdot h_1}, \quad AA_6'' = 2 \cdot \frac{A\Phi_0 + 2 \cdot \alpha}{l \cdot h_0} \quad (8)$$

из (5), с учетом (8) и упрощений, при $A\Phi_0 = A\Phi_1$, получим

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{A\Phi_1 - \alpha}{(A\Phi_1 + \alpha) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \right)}, \quad (9)$$

$$A\Phi_1 = f \cdot (1 - f).$$

Сравнивая численные значения для нейтрального угла (9) и формулу Эжелунда-Павлова, качественно и количественно получаем близкий результат. Необходимо под-

черкнуть, что формула Эжелунда-Павлова получена при условии равномерного распределения контактного нормального напряжения. Постоянные значения θ_0 и θ_1 с учетом (6) и граничных условий запишутся

$$\begin{aligned}\theta_0' &= -\frac{1}{2} \cdot (AA_6' + AA_6'') \cdot \left(l_{om}^2 - \frac{h_0^2}{4} \right) + (AA_6' \cdot l_{om} - AA_6'' \cdot l_{on}) \cdot l_{om}, \\ \theta_1' &= -\frac{1}{2} \cdot (AA_6' + AA_6'') \cdot \left(l_{on}^2 - \frac{h_1^2}{4} \right) - (AA_6' \cdot l_{om} - AA_6'' \cdot l_{on}) \cdot l_{on},\end{aligned}\quad (10)$$

учитывая, что $l_{om} = \frac{l}{2} + x_0$, $l_{on} = \frac{l}{2} - x_0$.

С учетом выражений (2)-(6), (8) и (9), (10) были получены рабочие выражения для расчета напряженного состояния металла в очаге деформации при прокатке. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{\frac{k_0}{\cos A \Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x \right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A \Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x \right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \cos A \Phi + k_0, \\ \sigma_y &= -3 \cdot \frac{\frac{k_0}{\cos A \Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x \right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A \Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x \right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \cos A \Phi + k_0, \\ \tau_{xy} &= \frac{\frac{k_0}{\cos A \Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x \right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A \Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x \right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \sin A \Phi.\end{aligned}\quad (11)$$

По формулам (11) были подсчитаны значения относительных контактных напряжений, представленных на рис.1-3.

Особенностью данного решения является асимметричный характер нагружения, что приводит к сдвигу экстремальных точек эпюр в сторону выхода металла из очага деформации как по нормальным, так и по касательным напряжениям. Такой сдвиг определяется появлением в решении угла наклона давящей поверхности φ , который, в общем, является переменной величиной

$$\varphi = \frac{\frac{l}{2} - x}{R},$$

где R – радиус вала, x – переменная координата. Из выражения следует, что на входе в очаг деформации угол φ может принимать значение угла захвата α , а на выходе из зоны обжатия, $x = \frac{l}{2}$, равен нулю.

Кроме этого, введение функции H_σ , (3), позволяет учесть в одном выражении сопротивление пластической деформации на входе и выходе из очага.

Выражения (11) определяют компоненты тензора напряжений в зоне пластического формоизменения для всего объема очага деформации, включая зоны отставания и опережения.

В силовом отношении появление в выражении (5) угла предполагает его „компенсацию”, т.е. сдвиг вдоль очага деформации линии раздела течения металла в сторону выхода из очага деформации.

Есть еще один параметр – „координатный” x_0 , определяющий сдвиг эпюры контактных напряжений вдоль оси в направлении прокатки.

Он присутствует в показателе экспоненты θ и является определяющим в смещении экстремальных точек на эпюрах контактных нормальных и касательных напряжений. На рис.1-3 представлены результаты расчета по выражению (11).

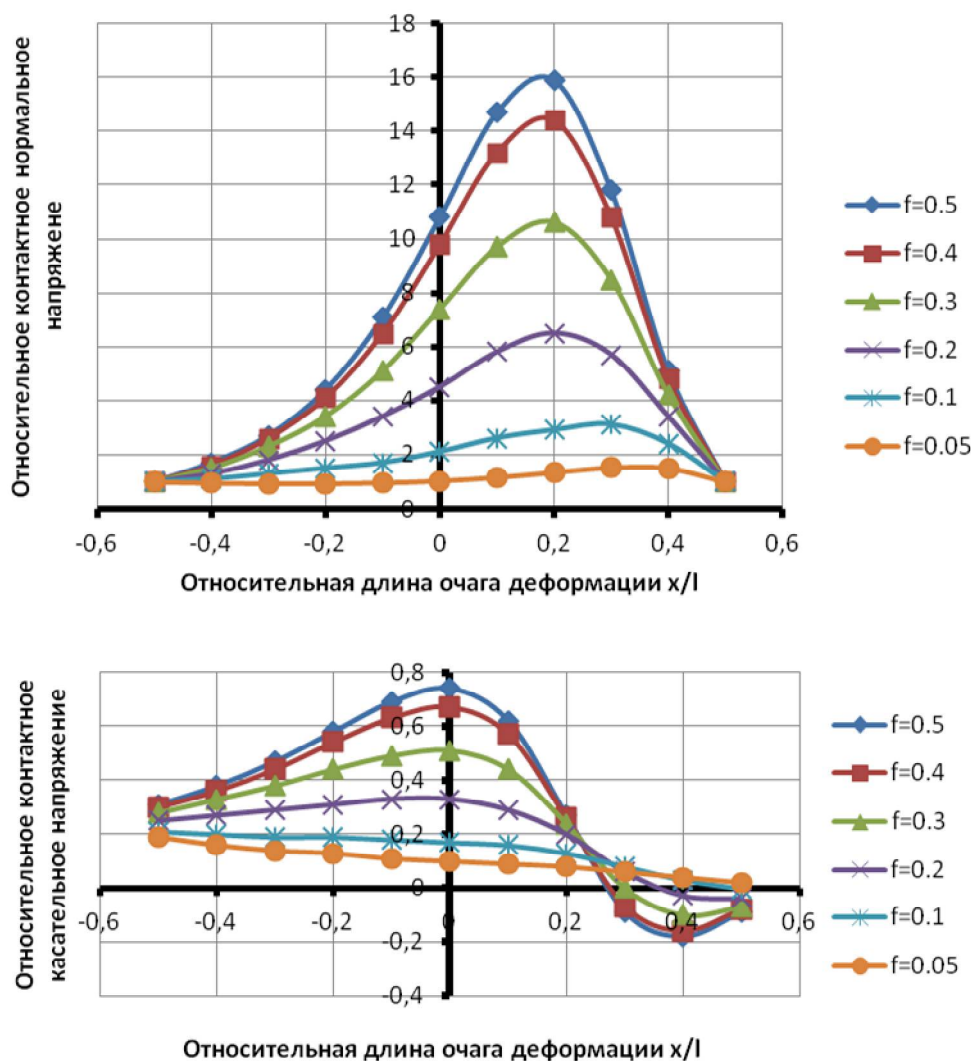


Рисунок 1 – Распределение нормальных и касательных контактных напряжений вдоль очага деформации при прокатке в зависимости от коэффициента трения

$$f \left(\frac{l}{h} = 15,49 ; \alpha = 0,077 \right)$$

С ростом коэффициента трения значения контактных напряжений увеличиваются, хотя для разных факторов формы – по-разному.

При этом наблюдается разное смещение максимальных значений нормальных напряжений вдоль очага деформации в ту или иную стороны.

С изменением коэффициента трения экстремальные точки смещаются в сторону входа или выхода металла в валки.

Следует отметить, что выражения (11) являются едиными для всего очага деформации. На рис.1-3 видно, что математически реально представлены переходные зоны очага деформации. Нет разрывов эпюр контактных напряжений в нейтральном сечении.

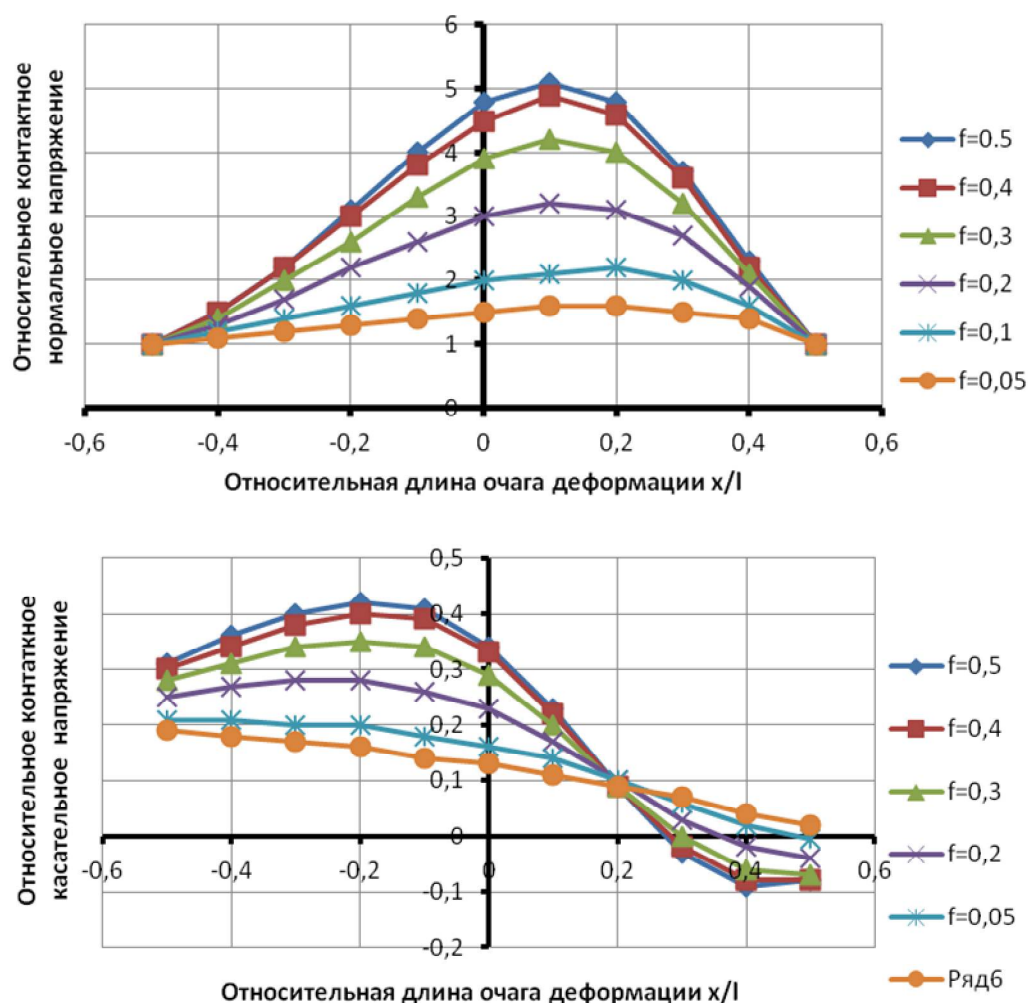


Рисунок 2 – Распределение нормальных и касательных контактных напряжений вдоль очага деформации при прокатке в зависимости от коэффициента трения

$$f \left(\frac{l}{h} = 8,61; \alpha = 0,077 \right)$$

Длина зоны опережения изменяется с изменением контактного трения. При этом касательные контактные напряжения имеют максимальные значения в зонах отстаивания и опережения, смещаясь с изменением коэффициента трения.

Для минимальных значений коэффициента трения распределение касательного напряжения по длине имеет линейный характер.

Просматривается запредельное состояние, когда угол захвата превышает угол трения. Особенно это видно при прокатке тонких полос, когда эпюра нормальных контактных напряжений становится вогнутой на большей части очага деформации ($\frac{l}{h} = 15,49; \alpha = 0,05$).

С уменьшением фактора формы распределение нормальных напряжений становится более равномерным [9].

Кроме того, при прокатке более толстых полос запредельный случай просматривается только по касательным напряжениям, когда имеет место только одна зона – зона отставания, рис.3.

Реакция нормальных напряжений на это состояние отсутствует. Возможно, это связано с прокаткой полосы с отрицательным опережением [10].

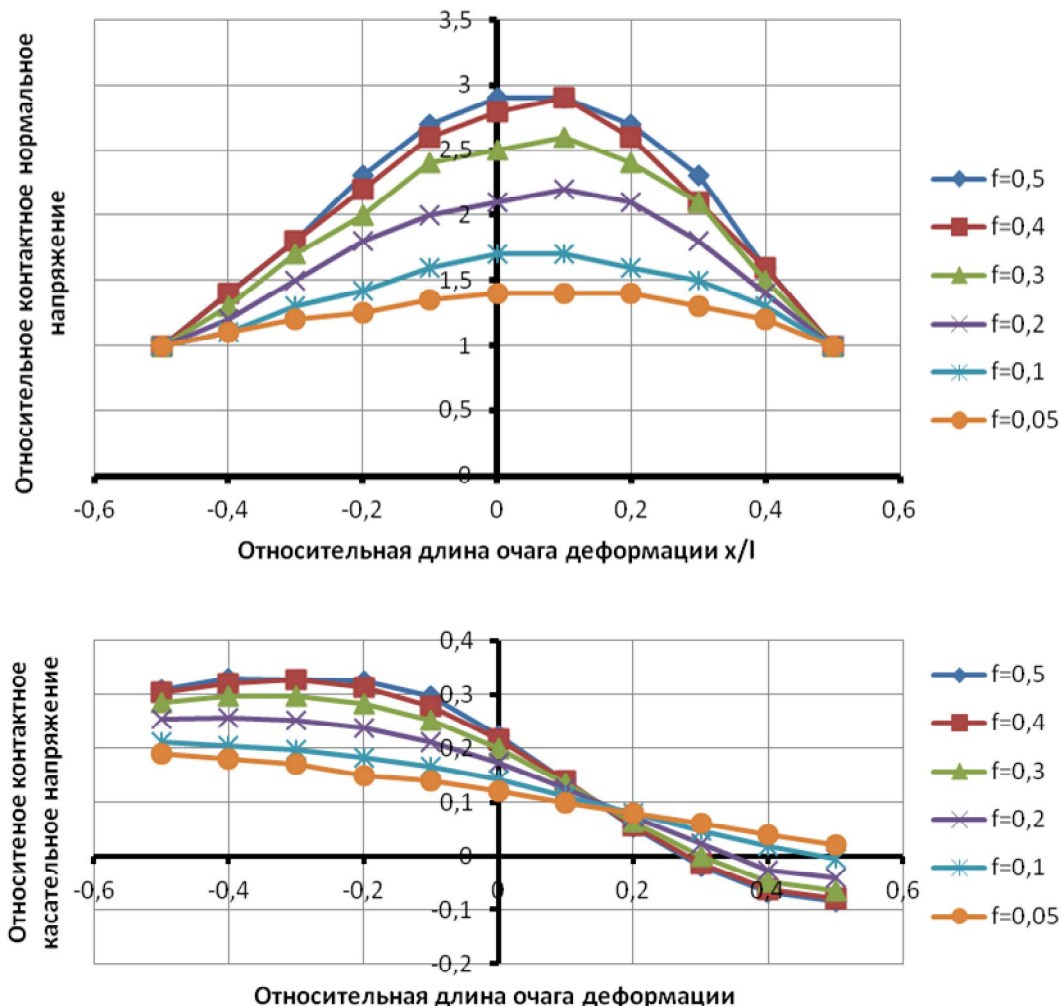


Рисунок 3 – Распределение нормальных и касательных контактных напряжений вдоль очага деформации при прокатке в зависимости от коэффициента трения

$$f \left(\frac{l}{h} = 5,164 \quad \alpha = 0,077 \right)$$

На всех эпюрах касательных напряжений есть точки, в которых пересекаются все кривые независимо от фактора формы и коэффициента трения. При этом точка смещается в сторону входа в очаг деформации при уменьшении фактора формы.

Выводы.

1. На базе метода гармонических функций предложено решение асимметричной плоской задачи теории пластичности.
2. Изменяющийся угол наклона контактной поверхности приводит к изменению напряженного состояния зоны обжатия, проявляющее себя разным смещением экстремальных точек вдоль очага деформации.
3. Предложенные выражения правильно качественно и количественно характеризует напряженное состояние металла при асимметричном нагружении металла.

4. Напряженное состояние в очаге деформации определяется едиными выражениями.
5. Указанные исследования показывают, что решение в гармонических функциях позволяет определять напряжения для граничных условий разной сложности.

6. Предложенное решение можно использовать при расчетах напряжений в процессах обработки металлов давлением, в которых внешняя нагрузка имеет несимметричный характер приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Целиков А.И. Теория прокатки / Целиков А.И., Гришков А.И. – М.: Металлургия, 1970. – 358с.
2. Василев Я.Д. Теория продольной прокатки / Василев Я.Д., Минаев А.А. – Донецк: УНИТЕХ, 2009. – 488с.
3. Чигиринский В.В. Определение напряженного состояния пластического тела в условиях плоской деформации / Чигиринский В.В. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1990. – №7. – С.48-49.
4. Чигиринский В.В. Определение деформированного состояния пластического тела в условиях плоского течения / Чигиринский В.В. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1990. – №9. – С.32-33.
5. Чигиринский В.В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / Чигиринский В.В. // Изв вузов. Черная металлургия. – 2009. – №5. – С.11-16.
6. Чигиринский В.В. Аналитическое исследование модели пластической среды / Чигиринский В.В. // Изв вузов. Черная металлургия. – 2012. – №1. – С.55-57.
7. Производство тонкостенного проката специального назначения / [Чигиринский В.В., Кресанов Ю.С., Качан А.Я. и др.]. – Запорожье: ВАЛПИС, 2014. – 295с.
8. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Малинин Н.Н. – М.: Машиностроение, 1975. – 399с.
9. Клименко П.Л. Контактные напряжения при прокатке / Клименко П.Л., Данченко В.Н. – Днепропетровск: ПОРОГИ, 2007. – 285с.
10. Максименко О.П. Развитие теории смазочного действия и совершенствование процесса прокатки на ее основе: дис. ... доктора техн. наук: 5.03.05 / Максименко Олег Павлович. – Днепропетровск, 1992. – 564с.

Поступила в редколлегию 20.03.2018.

УДК 539.374.001.8

DOI 10.31319/2519-2884.32.2018.163

ЧИГИРИНСКИЙ В.В., д.т.н., профессор

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В РЕШЕНИЯХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Введение. Разные процессы обработки металлов давлением могут быть охарактеризованы единими уравнениями теории пластичности, но разными граничными условиями. При этом постоянные и функции интегрирования определяются физическими и математическими моделями, которые заложены в краевых условиях задачи. Возникает необходимость их обобщения. Это позволит с единых позиций оценить результат решения, упростить подходы определения граничных условий, получить решение заданной системы уравнений. Для анализа граничных условий в напряжениях воспользу-