

Висновки. Результати розкладання в ряд Фур'є напруги збудження мостового несиметричного збуджувача синхронного генератора свідчать, що третя гармоніка складає 66% від амплітуди першої гармоніки. Значна величина третьої гармоніки обумовлена великим кутом керування тиристорами збуджувача при номінальному режимі роботи синхронного генератора. Через значну третю гармоніку вторинна обмотка випрямляючого трансформатора живлення несиметричного мостового збуджувача повинна бути з'єднана у трикутник. Несиметрія напруги збудження по відношенню до осі абсцис викликає присутність парних гармонік.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баев А.В., Волков Ю.К., Долинин В.П., Корнеев В.Я. Вентильные преобразователи с конденсаторами в силовых цепях. М.: Энергия, 1969. 236с.: ил.
2. Петухов М.В., Літковець С.П. Спосіб зниження питомих втрат активної потужності в статичних тиристорних компенсаторах реактивної потужності з примусовою комутацією. *Електромеханічні і енергозберігаючі системи*. Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 2013. № 2 (22), частина 2. С.298-302.
3. Кашкалов В.И., Пололовинкин Б.И. Улучшение энергетических показателей управляемых вентилях. К.: Техника, 1988. 159с.
4. Артюхов И.И., Митяшин Н.П., Степанов С.Ф. Адаптируемый преобразовательный комплекс. *Вестник СГТУ*, 2005. №3 (8). С. 104-109.
5. Низимов В.Б., Колычев С.В., Розумный П.С. Влияние принудительной емкостной коммутации на энергетические показатели мостовых возбудителей. *Електротехніка*, 1990. №4. С.4-9.

Надійшла до редколегії 21.01.2020.

УДК 519.216:621.311.44

DOI 10.31319/2519-2884.36.2020.13

КЛЮЄВ О.В., к.т.н., доцент
ХМЕЛЬНИЦЬКИЙ Є.Д., к.т.н., доцент
НОСАКОВ Є.Г., здобувач вищої освіти
КОЛІСНИК Д.О., здобувач вищої освіти

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

АНАЛІЗ СТРУМУ НАВАНТАЖЕННЯ ТЯГОВОЇ ПІДСТАНЦІЇ ЯК ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Вступ. Рішення завдань підвищення ефективності і надійності роботи систем електропостачання тісно пов'язане з питаннями розрахунку і прогнозування електричних навантажень. З огляду на те, що графіки навантаження електроприймачів є реалізаціями випадкових процесів, найбільш доцільними є імовірнісні методи визначення розрахункових навантажень. Приймаючи до уваги, що визначення навантажень є одним із перших етапів проектування, то їх точна величина суттєво впливає на вибір усіх елементів системи електропостачання та її техніко-економічні показники [1].

Постановка задачі. Оцінити можливість застосування методики аналізу нестационарних випадкових процесів з прихованими періодичностями до визначення імовірнісних характеристик загального струму тягової підстанції залізниці.

У загальному випадку нестационарного випадкового процесу не існує статистичних методів його дослідження. Проте випадкові процеси в енергопостачанні мають добову, тижневу, річну і іншу періодичності, пов'язані з роботою підприємств, транспорту і побутових навантажень. Якщо прийняти в якості однієї реалізації випадкового процесу його добовий запис, то, накопичивши досить представницьку вибірку в кожному його перерізі, можна отримати характеристики процесу шляхом їх інтерполяції, приймаючи значення, розраховані в точках перерізу, вузловими. Проте спостереження в цьому випадку може затягнутися на тривалий період, і отримані характеристики будуть застарілими.

Усіх цих труднощів можна уникнути, якщо в якості математичної моделі прийняти наступне представлення випадкового процесу [2]:

$$x(t) = m(t) + \varepsilon(t), \quad (1)$$

де $x(t)$ – досліджуваний процес; $m(t)$ – математичне очікування, залежне від часу; $\varepsilon(t)$ – стаціонарний нормальний процес з параметрами $N(0, \sigma)$.

Передбачається, що нестационарність випадкового процесу $x(t)$ обумовлена тільки змінним математичним очікуванням, яке у свою чергу є детермінованою функцією. Тоді центрований випадковий процес $\varepsilon(t) = x(t) - m(t)$ має властивість стаціонарності. Якщо припущення відносно $\varepsilon(t)$ вірні, то при досить представницькій вибірці з процесу $x(t)$, а отже і з процесу $\varepsilon(t)$, середнє значення $\bar{\varepsilon}(t)$ наблизиться до нуля, і залишиться тільки детермінована функція $m(t)$.

Результати роботи. *Методика дослідження.* Математичне очікування $m(t)$ в силу періодичності випадкового процесу $x(t)$ може бути представлене у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти якого визначаються методом найменших квадратів [2, 3]. Представимо функцію $m(t)$ відрізком ряду Фур'є:

$$m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^r (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t), \quad (2)$$

тоді процес $x(t)$ запишеться у вигляді:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^r (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) + \varepsilon(t), \quad (3)$$

де $\omega_i = \frac{2\pi}{T} i$; $i = 1, \dots, r$.

Величина T є періодом першої гармоніки, який дорівнює 24 години, вважаючи що досліджуваний нестационарний випадковий процес має добову періодичність.

При кроці квантування за часом $\Delta(t)$ частота найвищої гармоніки, коефіцієнти якої піддаються визначенню, відповідно до теореми Котельникова дорівнює $1/(2\Delta(t))$, а об'єм вибірки для однієї реалізації випадкового процесу має бути не менший $\frac{T}{\Delta(t)} = 1$.

Загальна кількість початкових даних при m реалізаціях випадкового процесу буде дорі-

внювати $n = ml$ і має бути парною. Експериментальні дані необхідно представити у вигляді таблиці, де кожен рядок відповідає певній реалізації, а число стовпців дорівнює числу значень випадкового процесу в одній реалізації.

Виділивши з (3) відхилення випадкової величини від її математичного очікування, отримаємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t_1) &= x(t_1) - \frac{a_0}{2} - \sum_{i=1}^r (a_i \cos \omega_i t_1 + b_i \sin \omega_i t_1); \\ \varepsilon(t_2) &= x(t_2) - \frac{a_0}{2} - \sum_{i=1}^r (a_i \cos \omega_i t_2 + b_i \sin \omega_i t_2); \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon(t_n) &= x(t_n) - \frac{a_0}{2} - \sum_{i=1}^r (a_i \cos \omega_i t_n + b_i \sin \omega_i t_n). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Оцінки невідомих коефіцієнтів a_0, a_i, b_i визначимо методом найменших квадратів [3] за умови мінімізації суми S по змінних a_0, a_i, b_i :

$$S = \sum_{j=1}^n \varepsilon^2(t_j) = \sum_{j=1}^n \left[x(t_j) - \frac{a_0}{2} - \sum_{i=1}^r (a_i \cos \omega_i t_j + b_i \sin \omega_i t_j) \right]^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

Екстремальне значення виразу (5) знайдемо в результаті розв'язання системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= -\sum_{j=1}^n \left[x(t_j) - \frac{a_0}{2} - \sum_{i=1}^r (a_i \cos \omega_i t_j + b_i \sin \omega_i t_j) \right] = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial a_k} &= -2 \sum_{j=1}^n \left[x(t_j) - \frac{a_0}{2} - \sum_{i=1}^r (a_i \cos \omega_i t_j + b_i \sin \omega_i t_j) \right] \cos \omega_k t_j = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial b_k} &= -2 \sum_{j=1}^n \left[x(t_j) - \frac{a_0}{2} - \sum_{i=1}^r (a_i \cos \omega_i t_j + b_i \sin \omega_i t_j) \right] \sin \omega_k t_j = 0. \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Розв'язання системи (6) істотно спрощується при використанні матричної алгебри. Введемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cos \omega_1 t_1 & \sin \omega_1 t_1 & \dots & \cos \omega_r t_1 & \sin \omega_r t_1 \\ \frac{1}{2} & \cos \omega_1 t_2 & \sin \omega_1 t_2 & \dots & \cos \omega_r t_2 & \sin \omega_r t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \cos \omega_1 t_n & \sin \omega_1 t_n & \dots & \cos \omega_r t_n & \sin \omega_r t_n \end{pmatrix}, \quad (7)$$

яка має n рядків і $2r+1$ стовпців.

Позначивши $c_0 = a_0, c_1 = a_1, c_2 = b_1, \dots, c_{2r-1} = a_r, c_{2r} = b_r$, отримаємо транспоновану матрицю-стовпець C' у вигляді:

$$C' = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_{2r-1}, c_{2r}). \quad (8)$$

У такому разі система (4) запишеться наступним чином:

$$E = X - AC, \quad (9)$$

де $E' = (\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2), \dots, \varepsilon(t_n))$,

$X' = (x_1(t_1), \dots, x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_2(t_1), \dots, x_i(t_1), \dots, x_i(t_1), \dots, x_m(t_1), \dots, x_m(t_1))$ – вектори-стовпці розмірністю $(n \times 1)$.

Вираз (5) в матричній формі запису прийме вигляд:

$$S = E'E = (X - AC)'(X - AC) = X'X - 2C'A'X + C'A'AC, \quad (10)$$

тоді диференціюючи (10) по кожному коефіцієнту c_i , отримаємо систему рівнянь

$$-2A'X + 2A'AC = 0, \quad (11)$$

звідки оцінки коефіцієнтів \hat{C}_i визначаються з розв'язання системи

$$\hat{C} = (A'A)^{-1} A'X \quad (12)$$

за умови, що матриця $B = A'A$ – невироджена.

Матриця B квадратна, розміром $(2r+1) \times (2r+1)$, усі члени, окрім головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Питання про кількість членів ряду Фур'є, яке треба зберегти в розкладанні, вирішується перевіркою на значимість оцінок коефіцієнтів за критерієм Стюдента, проте раніше необхідно знайти дисперсії оцінок \hat{C} коефіцієнтів C .

Випадковий процес $x(t)$ відрізняється від стаціонарного процесу $\varepsilon(t)$ з параметрами $N(0, \sigma)$ на величину не випадкової функції $m(t)$, тому дані перерізи цього процесу мають однакові дисперсії σ^2 , які запишемо у вигляді:

$$D(X) = \sigma^2 E, \quad (13)$$

де E – одинична матриця.

Позначивши матрицю з (12) як

$$(A'A)^{-1} A' = F, \quad (14)$$

запишемо (12) у вигляді

$$\hat{C} = FX. \quad (15)$$

Тоді матриця дисперсій оцінок визначиться як результат наступних перетворень:

$$\begin{aligned} D[\hat{C}] &= D[FX] = FD[X]F' = (A'A)^{-1} A' \sigma^2 E A (A'A)^{-1} = \sigma^2 (A'A)^{-1} A' E A (A'A)^{-1} = \\ &= \sigma^2 (A'A)^{-1} = \sigma^2 B^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким чином, за формулою (16) можуть бути визначені дисперсії оцінок коефіцієнтів \hat{C}_i , де $i = 0, 1, \dots, 2r$.

Оскільки σ^2 – величина невідома, то вона замінюється на оцінку S^2 дисперсій в перерізах випадкового процесу $x(t)$, що визначається за формулою [6]:

$$S^2 = \frac{(X - A\hat{C})'(X - A\hat{C})}{v} \quad (17)$$

де $v = n - 2r - 1$ – число ступенів свободи.

Записавши матрицю дисперсій оцінок коефіцієнтів ряду Фур'є у вигляді

$$D[\hat{C}] = S^2 B^{-1}, \quad (18)$$

отримаємо нормовану величину

$$t_{i,v} = \frac{|\hat{c}_i| - c_i}{\sqrt{D\hat{c}_i}}, \quad (19)$$

яка має розподіл Стюдента з $v = n - 2r - 1$ ступенями свободи.

Гіпотеза H_0 , що перевіряється, полягає в тому, що $c_i = 0$; якщо значення $t_{i,v}$, визначене за (19), виявляється більшим від критичного $t_{кр}$ для рівня значимості $q\%$, який зазвичай приймається 5%, то гіпотеза H_0 відкидається і оцінка приймається значимою [5].

Слід підкреслити, що, якщо досліджуваний процес насправді є стаціонарним, то усі коефіцієнти в розкладанні (2) є статистично незначними за винятком коефіцієнта a_0 .

Виконавши апроксимацію функції $m(t)$ рядом Фур'є, віднімаємо з початкового процесу $x(t_j)$ значення $m(t_j)$:

$$\varepsilon(t_j) = x(t_j) - m(t_j) \quad (20)$$

і за отриманими значеннями $\varepsilon(t_j)$ будуємо гістограму, перевіряючи нормальність розподілу за критерієм χ^2 [7].

Для перевірки гіпотези H_0 про рівність дисперсій процесу в різні моменти часу застосуємо статистичний критерій Кокрена [4, 5]. У кожному перерізі випадкового процесу $\varepsilon(t_k)$ ($k = \overline{1, l}$) обчислюється оцінка дисперсії S_k^2 , з l дисперсій S_k^2 , розрахованих за вибіркою об'єму m , вибирається максимальна:

$$S_{\max}^2 = \max(S_1^2, S_2^2, \dots, S_l^2). \quad (21)$$

Якщо значення статистики

$$G = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_l^2} \quad (22)$$

виявиться меншим від $G_{кр}$, знайденого з таблиць [4] для $v = m - 1$ ступенів свободи, l дисперсій і заданого рівня значимості, то гіпотеза про рівність дисперсій приймається.

Подальше дослідження процесу укладається в межі методів, які використовуються для дослідження стаціонарних процесів. Віднімаючи з безперервного запису випадкового процесу $x(t)$ виразу, що апроксимує $m(t)$, отримаємо ергодичний стаціонарний центрований випадковий процес $\varepsilon(t)$, кореляційна функція якого може бути визначена відомими методами.

Після визначення статистичної оцінки кореляційної функції і побудови її графіка, апроксимуємо кореляційну функцію аналітичним виразом, зручним при подальшому дослідженні. Нормована середньоквадратична помилка оцінки кореляційної функції $R(\tau)$ визначається за формулою [7]

$$\varepsilon_R = \frac{1}{\sqrt{2BT}} \left(1 + \frac{R^2(0)}{R^2(\tau)} \right)^{1/2} \quad (23)$$

де T – тривалість реалізації випадкового процесу; B – ширина смуги частот, визначена за графіком спектральної щільності $S(f)$.

Спектральна щільність і кореляційна функція виражаються взаємно одна через іншу перетвореннями Фур'є:

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} S(f) \cos 2\pi f \tau df, \quad S(f) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau, \quad (24)$$

тоді нормовані кореляційна функція і спектральна щільність запишуться у вигляді:

$$\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{D}, \quad s(f) = \frac{S(f)}{D}, \quad (25)$$

де D – дисперсія, розрахована за однією реалізацією процесу $\varepsilon(t)$, утвореної як сума реалізацій такої ж загальної тривалості.

Функції $\rho(\tau)$ і $s(f)$ аналогічно пов'язані перетвореннями Фур'є:

$$\rho(\tau) = \int_0^{\infty} s(f) \cos 2\pi f \tau df, \quad s(f) = 4 \int_0^{\infty} \rho(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau. \quad (26)$$

Статистико-вірогідний аналіз загального струму підстанції як випадкового процесу. Наведена вище методика обробки спостережень застосовувалася для апроксимації рядом Фур'є математичного очікування навантаження на одній з тягових підстанцій постійного струму Придніпровської залізниці. Навантаження підстанції має виражену добову нерівномірність внаслідок приміського характеру руху потягів. Запис показань робився через кожні півгодини ($\Delta(t) = 0.5 \text{ год}$) впродовж 20 діб, причому передвихідні і вихідні дні зі спостереження виключалися. В результаті проведених спостережень отримано $m = 20$ добових реалізацій процесу, кожна з яких містить по $l = 48$ значень випадкової величини струму, загальна кількість вимірів дорівнює $n = ml = 20 * 48 = 960$.

Розроблена програма відповідно до свого алгоритму здійснила розрахунки оцінок коефіцієнтів ряду Фур'є за формулою (12) з урахуванням того, що було узято перші двадцять гармонік ряду ($r = 20$) і отримано наступні результати:

- оцінка постійної складової ряду $\hat{a}_0 = 74.11$;
- значення амплітуд косинусоїдальних складових $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{20}$: 0.1544, 2.2000, 1.0564, 1.4742, 0.3600, 0.8149, 0.1637, 0.2406, 0.9665, 1.2522, 1.6519, 0.9271, 0.9437, -0.4244, -0.2675, 0.1385, 0.8637, -0.1691, -0.1167, 0.4675;
- значення амплітуд синусоїдальних складових $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{20}$: 4.4373, 1.1966, 0.8119, 3.0373, 0.4152, -0.5560, 0.6604, -1.0338, -0.7342, -2.7628, 0.0473, -0.1875, 0.7074, 0.2271, -0.5454, -0.8895, -0.4027, -0.9643, -0.7574, -0.3185.

Тут і далі відкидається детальний опис обчислювальних процедур, оскільки вони наведені в літературі, яка вказана в переліку посилань.

Оцінка дисперсії випадкового процесу $x(t)$, визначена за формулою (17), $S^2 = 217.697$ і $S = 14.75$. Величини дисперсій оцінок коефіцієнтів $\hat{a}_0, \hat{a}_i, \hat{b}_i$ відповідно до (18) дорівнюють: $D\hat{a}_0 = 0.907$, $D\hat{a}_i = D\hat{b}_i = 0.453$, де $i = 1, \dots, r$.

Далі за (19) розраховані значення t -статистики Стьюдента і записані в наступному порядку: $t_{\hat{a}_0}, t_{\hat{a}_1}, t_{\hat{b}_1}, t_{\hat{a}_2}, t_{\hat{b}_2}, \dots, t_{\hat{a}_r}, t_{\hat{b}_r}$: 77.8140, 0.2293, 6.5888, 3.2668, 1.7768, 1.5687, 1.2055, 2.1890, 4.5100, 0.5346, 0.6165, 1.2101, 0.8256, 0.2430, 0.9807, 0.3573, 1.5351, 1.4351, 1.0903, 1.8594, 4.1025, 2.4528, 0.0702, 1.3766, 0.2784, 1.4014, 1.0505, 0.6303, 0.3372, 0.3972, 0.8098, 0.2057, 1.3208, 1.2824, 0.5979, 0.2511, 1.4319, 0.1733, 1.1247, 0.6941, 0.4730.

Критичне значення для $v = n - 2r - 1 = 960 - 41 = 919$ і рівні значимості $q = 5\%$ за таблицями [4] дорівнює $t_{кр} = 1.97$. Після перевірки значимості оцінок коефіцієнтів a_i та b_i за критерієм Стьюдента отримані наступні результати: статистично значимими виявилися оцінки $\hat{a}_0, \hat{b}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_4, \hat{b}_4, \hat{b}_{10}, \hat{a}_{11}$. Тоді математичне очікування апроксимується виразом [8]:

$$m(t) = 37.055 + 4.43 \sin\left(\frac{2\pi}{24}t\right) - 2.2 \cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right) + 1.47 \cos\left(\frac{2\pi}{6}t\right) + \\ + 3.037 \sin\left(\frac{2\pi}{6}t\right) - 2.76 \sin\left(\frac{20\pi}{24}t\right) + 1.65 \cos\left(\frac{22\pi}{24}t\right). \quad (27)$$

Випадковий процес $x(t)$, його математичне очікування $m(t)$, а також процес $\varepsilon(t)$ показані на рис. 1-3. На цих рисунках по осі абсцис відкладені номери вимірів.

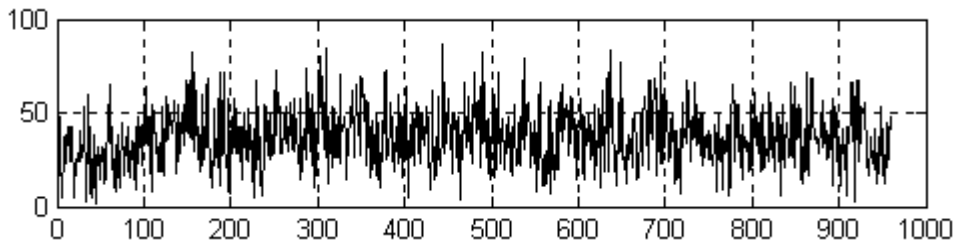


Рисунок 1 – Запис реалізації випадкового процесу $x(t)$

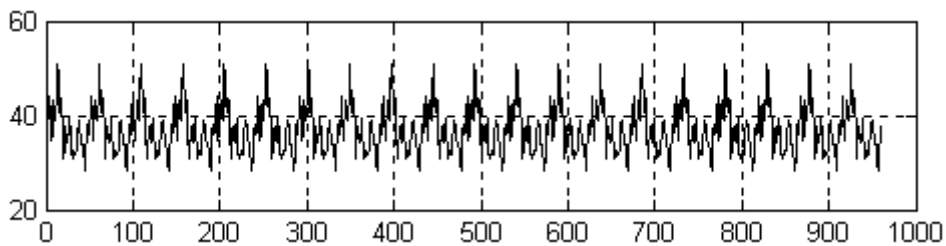


Рисунок 2 – Математичне очікування $m(t)$ випадкового процесу $x(t)$

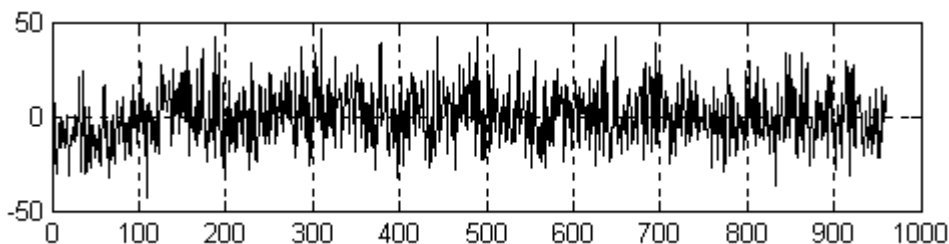


Рисунок 3 – Центрований випадковий процес $\varepsilon(t)$

Як відомо, для стаціонарної випадкової функції математичне очікування має бути постійним. Проте ця умова не єдина. Друга умова, якій повинна задовольняти функція $\varepsilon(t)$ – це постійність дисперсії. Для перевірки гіпотези про рівність дисперсій процесу застосовано критерій Кокрена. Відповідно до цього критерію в кожному перерізі випадкового процесу $\varepsilon(t_k)$ ($k = \overline{1, 1}$) обчислюється оцінка дисперсії S_k^2 . Нижче наведено результати обчислень в порядку $S_1^2, S_2^2, S_3^2, \dots, S_{48}^2$: 196.59, 200.03, 152.85, 208.87, 337.64, 285.79, 317.42, 259.17, 300.38, 260.03, 253.99, 302.72, 273.67, 222.69, 248.24, 200.05, 138.53, 329.25, 180.04, 222.13, 129.52, 124.21, 356.77, 315.1, 55.884, 99.726, 181.05, 228.68, 309.78, 134.67, 173.88, 173.62, 223.67, 207.8, 194.58, 172.37, 291.84, 145.11, 202.06, 197, 318.73, 285.38, 113.38, 310.17, 132.05, 146.09, 111.08, 276.89. Визначаємо максимальне значення і суму дисперсій:

$$S_{\max}^2 = S_{23}^2 = 356.77, \quad \sum_{i=1}^{48} S_i^2 = 10501.$$

За (22) обчислюємо значення статистики критерію Кокрена:

$$G = \frac{356.77}{10501} = 0.034.$$

Табличне значення для довірчої вірогідності 0.95, кількості порівнюваних дисперсій 48 і кількості ступенів свободи $\nu = 20 - 1 = 19$ дорівнює $G_{\text{кр}} = 0.0595$. Оскільки $G < G_{\text{кр}}$, то ця вибірка з вірогідністю 0.95 не суперечить гіпотезі про рівність дисперсій.

Далі за даними вибірки $\varepsilon(t_j)$ ($j = \overline{1, n}$) будується емпірична функція щільності розподілу. За видом отриманої залежності висувається гіпотеза про нормальність розподілу значень процесу $\varepsilon(t)$. Відповідність теоретичного розподілу емпіричному перевіряється за критерієм χ^2 . Значення критерію Пірсона, розраховане за даними спостережень, дорівнює $\chi_{\text{набл}}^2 = 18.89$. Критична величина критерію $\chi_{\text{кр}}^2$, узятая з таблиці [4] при рівні значимості $\alpha = 5\%$ і числі ступенів свободи $\nu = 17$, дорівнює $\chi_{\text{кр}}^2 = 27.587$. Умова $\chi_{\text{набл}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$ говорить про те, що з вірогідністю 0.95 немає підстав відкинути гіпотезу про нормальність розподілу. Функція щільності розподілу, побудована за експериментальними даними, і згладжуюча її крива, зображені на рис.4.

Таким чином, випадковий процес $\varepsilon(t)$ є стаціонарним, ергодичним і підпорядковується нормальному закону розподілу.

Знайдемо кореляційну функцію процесу $\varepsilon(t)$. Для побудови кореляційної функції необхідно розрахувати оцінки елементів кореляційної матриці: кореляційні моменти, які обчислюються за формулою [7]:

$$\hat{K}(t_k, t_j) = \frac{\sum_{i=1}^m [x_i(t_k) - \bar{x}(t_k)] [x_i(t_j) - \bar{x}(t_j)]}{m - 1}, \quad (28)$$

$$\text{де } \bar{x}(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^m x_i(t_k)}{m}, \quad \bar{x}(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^m x_i(t_j)}{m}.$$

Оцінки нормованого кореляційного моменту визначаються формулою:

$$\hat{k}(t_k, t_j) = \frac{\hat{K}(t_k, t_j)}{S(t_k)S(t_j)}, \quad (29)$$

$$\text{де } S(t_k) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m [x_i(t_k) - \bar{x}(t_k)]^2}{m-1}}, \quad S(t_j) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m [x_i(t_j) - \bar{x}(t_j)]^2}{m-1}}, \quad k, j = 1, 2, \dots, l.$$

Значення $\hat{k}(t_k, t_j)$ служать елементами нормованої кореляційної матриці розмірності $l \times l$, яка є таблицею значень нормованої кореляційної функції. Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу не залежить від положення першого аргументу на осі абсцис, а тільки від проміжку τ між першим і другим аргументами:

$$K(t, t + \tau) = R(\tau), \quad k(t, t + \tau) = \rho(\tau). \quad (30)$$

Нормована кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є функція не двох, а одного аргументу τ . Отже, при постійному τ кореляційна функція має бути постійною. У нормованій кореляційній матриці постійному τ відповідають головна діагональ ($\tau = 0$) і паралелі цієї діагоналі ($\tau = \Delta(t)$; $\tau = 2\Delta(t)$; ...; $\tau = l\Delta(t)$). Усереднюючи оцінки нормованої кореляційної функції уздовж цих паралелей, отримуємо значення функції $\rho(\tau)$.

Апроксимуємо статистичну кореляційну функцію стандартною аналітичною залежністю

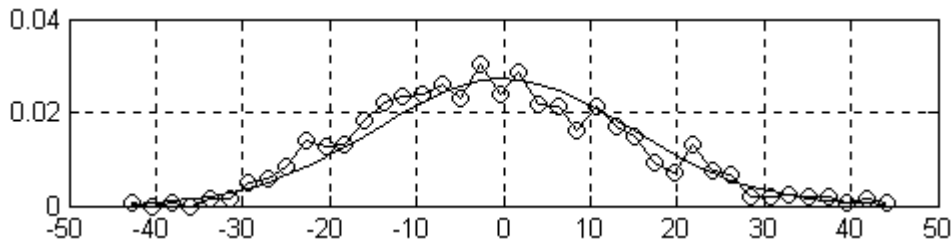


Рисунок 4 – Емпірична функція щільності розподілу значень випадкового процесу $\varepsilon(t)$ та її теоретична функція щільності нормального розподілу

$$\rho^*(\tau) = e^{-a|\tau|}, \quad \text{при } \tau > 0. \quad (31)$$

Параметр a визначається методом найменших квадратів, внаслідок чого приходимо до нелінійного рівняння відносно параметра a :

$$\sum_{i=1}^l \tau_i \rho(\tau_i) e^{-a\tau_i} - \sum_{i=1}^l \tau_i e^{-2a\tau_i} = 0 \quad (32)$$

Розв'язуючи рівняння (32) методом бісекції (ділення відрізка навпіл), знаходимо $a = 3.97$. Тоді аналітичний вираз нормованої кореляційної функції має вигляд:

$$\rho^*(\tau) = e^{-3.97|\tau|} \quad (33)$$

Функція (33) і перші десять точок функції $\rho(\tau)$ показані на рис.5.

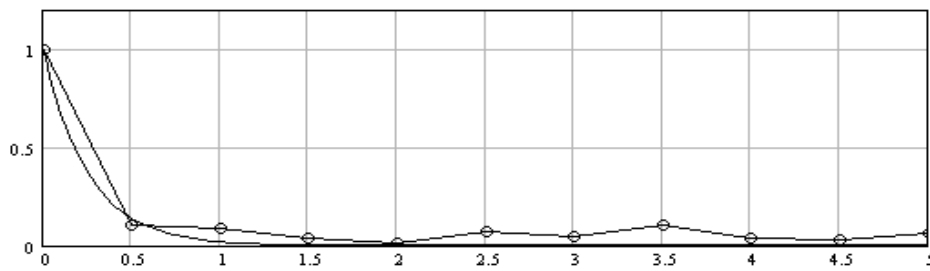


Рисунок 5 – Графіки функції $\rho(\tau)$ і згладжуючої залежності $\rho^*(\tau)$

Користуючись виразом (33) і формулою (24), знаходимо односторонню нормовану спектральну щільність

$$s(f) = 4 \int_0^{\infty} e^{-a\tau} \cos 2\pi f \tau d\tau = \frac{4a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{15.88}{15.76 + 4\pi^2 f^2}. \quad (34)$$

Графік функції $s(f)$ наведено на рис.6.

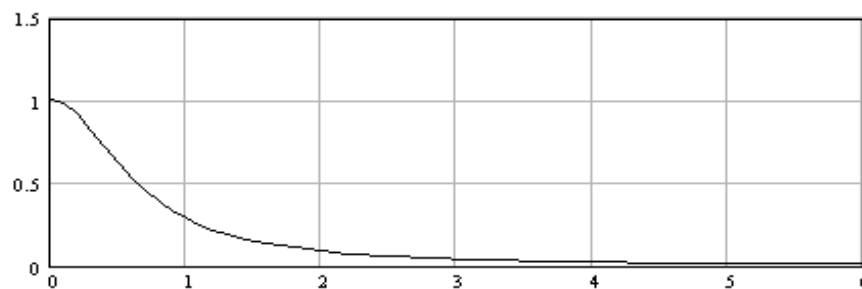


Рисунок 6 – Графік односторонньої нормованої спектральної щільності випадкового процесу $x(t)$

Кореляційна функція знаходиться за наступним співвідношенням:

$$R^*(\tau) = D\rho^*(\tau). \quad (35)$$

Замінивши дисперсію D її оцінкою S^2 , отримаємо:

$$R^*(\tau) = S^2 \rho^*(\tau) = 217.697 e^{-3.97|\tau|}. \quad (36)$$

Середньоквадратична помилка оцінки кореляційної функції $R(\tau)$ знаходиться за формулою (23). У нашому випадку довжина реалізації випадкового процесу дорівнює $T = 20 \cdot 24 = 480$ год. Ширина смуги частот визначається як

$$B = \frac{\sqrt{2}}{s(0)} \quad (37)$$

Розрахувавши B за (37), отримаємо $B = 1.4 \text{ год}^{-1}$. Приймаємо $R(\tau) = 0.2$, тобто виміром буде охоплений діапазон від максимального значення кореляційної функції до величини, яка дорівнює 20% цього значення. Тоді величина помилки оцінки в цьому експерименті буде дорівнювати:

$$\varepsilon_R = \sqrt{\frac{1+1/0.2^2}{2*1.4*480}} = 0.139.$$

Користуючись формулою (23) можна також знайти мінімальну довжину реалізації випадкового процесу, при якій похибка оцінки кореляційної функції буде не вища за деяку задану величину.

Висновки. У роботі викладено метод статистичного аналізу нестационарних випадкових процесів з прихованими періодичностями, які часто зустрічаються в енергопостачанні. Викладена розрахункова методика застосована до дослідження загального струму навантаження тягової підстанції як випадкового процесу. Результати розрахунку представлені наступним чином:

- досліджуваний в роботі випадковий процес є стаціонарним за дисперсією і не має стаціонарності за математичним очікуванням;
- для апроксимації математичного очікування струму навантаження підстанції використано відрізок ряду Фур'є; у роботі враховувалися перші двадцять гармонік, проте статистично значимими виявилися тільки постійна складова і 1, 2, 4, 10, 11 гармоніки. Наявність 1, 2, 4 гармонік в кривій математичного очікування можна пояснити змінністю роботи транспорту і промислових підприємств (двадцятичотиригодинна, дванадцятигодинна і шестигодина періодичності). Гармоніки 10 і 11 мають періоди, рівні 2.4 год. і 2.18 год., що може відповідати часу ходу вантажного потягу розрахунковою зоною;
- розподіл ординат струму тягової підстанції не суперечить гіпотезі про нормальність розподілу;
- за експериментальними даними визначено кореляційну функцію і запропоновано її апроксимуючу аналітичну залежність, зроблено оцінку точності апроксимації;
- отримані характеристики досліджуваного випадкового процесу можуть бути використані для прогнозування його екстремальних значень і цілей оптимального керування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жежеленко И.В., Саенко Ю.Л., Степанов В.П. Методы вероятностного моделирования в расчетах характеристик электрических нагрузок потребителей. М.: Энергоатомиздат, 1990. 128с.
2. Серебренников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965. 234с.
3. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998. 160с.
4. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983. 416с.
5. Фокин Ю.А. Вероятностно статистические методы в расчетах систем электроснабжения. М.: Энергоатомиздат, 1985. 153 с.
6. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ (Подход с использованием ЭВМ). М.: Мир, 1982. 488с.
7. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоатомиздат, 1982. 127с.
8. Жежеленко И.В. Высшие гармоники в системах электроснабжения промышленных предприятий. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 2000. 231с.

Надійшла до редколегії 27.01.2020.